Kvantová teorie pole

Obecné vektorové pole, charakterizované veličinou **F**(**r**), lze rozdělit na vírové (příčné) a nevírové (podélné), přičemž vírová a nevírová složka charakteristické veličiny **F**(**r**) jsou definovány vztahy:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_{\parallel}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_{\perp}(\mathbf{r}), \qquad (6.1)$$

přičemž

$$\begin{aligned} &rot\ \mathbf{F}_{\parallel} = 0\,; \qquad div\ \mathbf{F}_{\parallel} = div\ \mathbf{F}\,, \\ &div\ \mathbf{F}_{\perp} = 0\,; \qquad rot\ \mathbf{F}_{\perp} = rot\ \mathbf{F}\,, \end{aligned} \qquad (6.2)$$

kde $\mathbf{F}_{\perp}$ je vírová složka pole, $\mathbf{F}_{\parallel}$ nevírová složka pole.
Uvažujme nejprve elektromagnetické pole bez zdrojů, pro které platí Maxwellovy rovnice

$$\begin{aligned} &rot\ \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,; \quad div\ \mathbf{E} = 0\,; \\ &rot\ \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\,; \quad div\ \mathbf{H} = 0\,. \end{aligned} \qquad (6.3)$$

Vektorový potenciál **A** jsme definovali jako

$$\mathbf{H} = rot\ \mathbf{A}\,. \qquad (6.4)$$

Z Maxwellových rovnic přitom plyne, že

$$rot\left(\mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0\,. \qquad (6.5)$$

Tento vztah bude splněn, bude-li

$$\mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = grad\ \varphi\,, \qquad (6.6)$$

kde φ je libovolní skalární funkce.
Nechť $\varphi = 0$, pak

$$\mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \qquad (\ 6.7\ )$$

Z první Maxwellovy rovnice lze odvodit, že

$$rot\ rot\ \mathbf{A} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad (\ 6.8\ )$$

z čehož, uvážíme-li (6.7), plyne

$$grad\ div\ \mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \qquad (\ 6.9\ )$$

Zaveďme na základě gradientní invariance takový vektorový potenciál $\mathbf{A}'$, o němž platí, že

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + grad\ \psi, \qquad (\ 6.10\ )$$

kde ψ je libovolná skalární funkce.
Budeme-li požadovat, aby zavedený vektorový potenciál měl jen příčný charakter, musí být

$$div\ \mathbf{A}' = div\ \mathbf{A} + div\ grad\ \psi = 0, \qquad (\ 6.11\ )$$

z čehož

$$\Delta\psi = -div\ \mathbf{A}. \qquad (\ 6.12\ )$$

To je Poissonova rovnice pro hledanou skalární funkci ψ, kdy má vektorový potenciál $\mathbf{A}'$ příčný charakter.
Partikulárním řešením Poissonovy rovnice bude

$$\psi = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{div\ \mathbf{A}}{\mathbf{r}}\, dV\,. \tag{6.13}$$

Na základě gradientní invariance tak můžeme zvolit skalární funkci ψ při daném vektorovém potenciálu **A** tak, aby platilo

$$div\ \mathbf{A}' = 0\,. \tag{6.14}$$

Pak

$$\mathbf{H} = rot\ \mathbf{A}'\,; \quad \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}\,; \quad div\ \mathbf{A}' = 0\,. \tag{6.15}$$

Z posledních tří vektorových vztahů vyplývá, že při uvedené kalibraci vektorového potenciálu lze dosáhnout příčného charakteru vektorového potenciálu, intenzity elektrického a magnetického pole.
Jsou to tedy veličiny vírové.
Budou-li v oblasti elektromagnetického pole proudové a nábojové zdroje, získají Maxwellovy rovnice tvar

$$\begin{aligned} div\ \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon}\,, \\ rot\ \mathbf{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}\,. \end{aligned} \tag{6.16}$$

V tomto případě může mít intenzita elektrického pole obecný charakter

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}_\parallel\,, \tag{6.17}$$

kde $\mathbf{E}_\perp$ je příčná složka intenzity elektrického pole totožná s intenzitou elektrického pole bez nábojů.
Přitom

$$\begin{aligned} div\ \mathbf{E}_\perp &= 0\,, \\ rot\ \mathbf{E}_\parallel &= 0\,. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Ze druhé rovnosti (6.18) plyne

$$\mathbf{E}_{\parallel} = -grad\ \varphi, \qquad (6.19)$$

Výsledné elektrické pole pak je

$$\mathbf{E} = \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - grad\ \varphi, \qquad (6.20)$$

přičemž

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (6.21)$$

Řešením Poissonovy rovnice (6.20) je integrál

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{\mathbf{r}}\, dV. \qquad (6.22)$$

Na základě gradientní invariance můžeme opět, podobně jako v případě pole bez nábojů, zavést předpoklad

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_{\perp}. \qquad (6.23)$$

Dosadíme-li za

$$\mathbf{H} = rot\ \mathbf{A}, \qquad (6.24)$$

pak s uvážením (6.20), (6.22), (6.23) dostáváme

$$\Delta \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \varepsilon_0 \cdot grad\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mathbf{j}. \qquad (6.25)$$

Proudová hustota může mít obecný charakter, tedy

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\perp} + \mathbf{j}_{\parallel}. \qquad (6.26)$$

rovnice (6.25) pak po rozdělení příčných a podélných složek dává

$$\Delta \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mathbf{j}_\perp \, ,$$
$$\varepsilon_0 \cdot grad \, \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mathbf{j}_\parallel \, . \qquad (6.27)$$

U elektromagnetického pole se zdroji lze tedy provést takovou kalibraci, aby měl vektorový potenciál pouze příčný charakter.
Přitom je příčná a podélná složka intenzity elektrického pole určena jen průběhem vektorového potenciálu, zatímco podélná složka intenzity elektrického pole závisí jen na prostorovém uspořádání nábojových zdrojů.
Intenzita magnetického pole má od přírody vírový charakter a má tedy jen příčnou složku.

Lorentzova síla je popsána vztahem

$$\mathbf{F} = q\left[\mathbf{E} + \mu_0 \left(\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right)\right], \qquad (6.28)$$

a může mít rovněž obecně příčný i podélný charakter:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\perp + \mathbf{F}_\parallel . \qquad (6.29)$$

Platí

$$\mathbf{F}_\perp = q\left[\mathbf{E}_\perp + \mu_0 \left(\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right)\right],$$
$$\mathbf{F}_\parallel = q \cdot \mathbf{E}_\parallel = -q \cdot grad \; \varphi \, . \qquad (6.30)$$

Platnost (6.30) plyne z příčného charakteru vektorového součinu $\mathbf{v} \times \mathbf{H}$, tj.

$$div\left(\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right) = \left(\mathbf{v} \cdot rot \; \mathbf{H}\right) - \left(\mathbf{H} \cdot rot \; \mathbf{v}\right) = 0 \, . \qquad (6.31)$$

Integrujeme-li levou i pravou stranu (6.31) přes celý prostor, pak

$$\int_{V\to\infty} div(\mathbf{v}\times\mathbf{H})\,dV = \int_{S\to\infty} \mathbf{n}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{H})\,dS = \\ = \int_{V\to\infty} (\mathbf{v}\cdot rot\ \mathbf{H}) - (\mathbf{H}\cdot rot\ \mathbf{v})\,dV. \qquad (6.32)$$

Nechť je S kulová plocha s poloměrem blížícím se nekonečnu.
Pak s ohledem na konečnou velikost rychlosti **v** a vzhledem k tomu, že intenzita magnetického pole konverguje pro poloměr blížící se nekonečnu tak rychle, že

$$\int_{S\to\infty} \mathbf{n}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{H})\,dS \to 0, \qquad (6.33)$$

dostaneme

$$\int_{V\to\infty} (\mathbf{v}\cdot rot\ \mathbf{H}) - (\mathbf{H}\cdot rot\ \mathbf{v})\,dV = 0. \qquad (6.34)$$

To může nastat identicky při obecném průběhu **v** a **H** jen tehdy, bude-li platit (6.31).
Energii záření definujeme jako energii elektrického a magnetického pole příčných složek, tj.

$$W = \frac{1}{2}\int_V \left(\varepsilon_0 E_\perp^2 + \mu_0 H^2\right) dV. \qquad (6.35)$$

V kvantové teorii pole pokládáme za výchozí veličinu elektromagnetického pole vektorový potenciál **A**.
Je ho prostřednictvím nyní vyjádříme energii záření W.
Uvažujme nejprve pole bez zdrojů.
Potom

$$\int_V H^2\,dV = \int_V |rot\ \mathbf{A}|^2\,dV = \int_V (rot\ \mathbf{A}\cdot rot\ \mathbf{A})\,dV. \qquad (6.36)$$

Podle Greenovy věty (George Green (1793 – 1841))

$$\int_V (\mathbf{A}\; rot\; rot\; \mathbf{A})\, dV - \int_V (rot\; \mathbf{A} \cdot rot\; \mathbf{A})\, dV = \int_S \left[(\mathbf{A} \times rot\; \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \right] dS$$
(6.37)

Uvažujme neomezený prostor, kde $S \to \infty$.
Protože vektorový potenciál má vírový charakter, máme

$$\int_{S\to\infty} \left[(\mathbf{A} \times rot\; \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \right] dS \to 0\,, \qquad (\ 6.38\ )$$

neboť pro $\mathbf{r} \to \infty$ konverguje vektorový potenciál velmi rychle.
Pak

$$\int_V (rot\; \mathbf{A} \cdot rot\; \mathbf{A})\, dV = -\int_V (\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{A})\, dV = \sum_{i=1}^{3} \int_V \mathbf{A}_i \Delta \mathbf{A}_i\; dV\,. \qquad (\ 6.39\ )$$

Podle Greenovy věty

$$\int_V A_i \Delta A_i\; dV + \int_V (grad\; A_i)^2 dV = \int_S A_i \frac{\partial A_i}{\partial n}\, dS\,. \qquad (\ 6.40\ )$$

Pro $S \to \infty$ je podobně jako v předešlém případě

$$\int_V A_i \Delta A_i\; dV = -\int_V (grad\; A_i)^2 dV\,. \qquad (\ 6.41\ )$$

Pak

$$\int_V H^2\; dV = \sum_{i=1}^{3} \int_V \left| grad\; A_i \right|^2\; dV\,, \qquad (\ 6.42\ )$$

Uvážíme-li (6.15), pak

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\int_V \left(\varepsilon_0 E_{\perp i}^2 + \mu_0 \left|grad\ A_i\right|^2\right) dV =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\int_V \left[\varepsilon_0 \left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)^2 + \mu_0 \left|grad\ A_i\right|^2\right] dV. \qquad (\ 6.43\ )$$

Vztahem (6.43) je určena energie záření elektromagnetického pole, vyjádřená pomocí složek vektorového potenciálu.
Z rovnice (6.28) vyplývá, že hustota impulsu elektromagnetického pole připadající na objemovou jednotku je definována vztahem

$$\mathbf{x} = \frac{1}{c^2}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right). \qquad (\ 6.44\ )$$

Impuls elektromagnetického pole připadající na objem *V*, ve kterém je soustředěno elektromagnetické pole pak je

$$\mathbf{X} = \frac{1}{c^2}\int_V \left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right) dV\,. \qquad (\ 6.45\ )$$

Definujme impuls záření elektromagnetického pole pomocí příčných složek intenzity elektrického a magnetického pole tak, že

$$\mathbf{X}_z = \frac{1}{c^2}\int_V \left(\mathbf{E}_\perp\times\mathbf{H}\right) dV\,, \qquad (\ 6.46\ )$$

Vyjádřeme opět všechny složky pole pomocí vektorového potenciálu:

$$\mathbf{X}_z = \frac{1}{c^2}\int_V \left(\mathbf{E}_\perp\times rot\ \mathbf{A}\right) dV\,. \qquad (\ 6.47\ )$$

Protože

$$rot\ \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} rot\left(A_i \mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{3}\left(grad\ A_i \times \mathbf{u}_i\right), \qquad (\ 6.48\ )$$

kde $\mathbf{u}_i$ je jednotkový vektor ve směru souřadnicové osy.
Protože

$$\mathbf{E}_\perp \times \left(grad\ A_i \times \mathbf{u}_i \right) = grad\ A_i \left(\mathbf{E}_\perp \mathbf{u}_i \right) - \mathbf{u}_i \left(grad\ A_i \mathbf{E}_\perp \right), \qquad (6.49)$$

bude

$$\mathbf{X}_z = \frac{1}{c^2} \sum_{i=3}^{3} \int_V grad\ A_i \cdot E_{i\perp}\ dV + \frac{1}{c^2} \sum_{i=3}^{3} \int_V \mathbf{u}_i\ div \left(A_i \mathbf{E}_\perp \right) dV\ . \qquad (6.50)$$

Avšak

$$grad\ A_i \mathbf{E}_\perp = div \left(A_i \mathbf{E}_\perp \right) - A_i\ div\, \mathbf{E}_\perp = div \left(A_i \mathbf{E}_\perp \right). \qquad (6.51)$$

$$\mathbf{X}_z = \frac{1}{c^2} \sum_{i=3}^{3} \int_V grad\ A_i \cdot E_{i\perp}\ dV + \frac{1}{c^2} \sum_{i=3}^{3} \mathbf{u}_i \int_S A_i \left(\mathbf{E}_\perp \mathbf{n} \right) dS\ . \qquad (6.52)$$

Pro $S \to \infty$ plošný integrál konverguje k nule a

$$\mathbf{X}_z = \frac{1}{c^2} \sum_{i=3}^{3} \int_V E_{i\perp}\ grad\ A_i\ dV + \frac{1}{c^2} \sum_{i=3}^{3} \int_V \frac{\partial A_i}{\partial t} grad\ A_i\ dV\ . \qquad (6.53)$$

Impulsmoment záření definujeme jako v mechanice vztahem

$$\mathbf{I} = \frac{1}{c^2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{x}_z\ dV = \frac{1}{c^2} \int_V \mathbf{r} \times \left(\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{H} \right) dV = \frac{1}{c^2} \int_V \mathbf{r} \times \left(\mathbf{E}_\perp \times rot\ \mathbf{A} \right) dV\ . \qquad (6.54)$$

Nechť

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i \mathbf{u}_i\ . \qquad (6.55)$$

Pak

$$rot\left(A_i\mathbf{u}_i\right)=grad\ A_i\times\mathbf{u}_i \tag{6.56}$$

a

$$\mathbf{I}=\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{3}\int_V \mathbf{r}\times\left[\mathbf{E}_\perp\times\left(grad\ A_i\times\mathbf{u}_i\right)\right]dV \tag{6.57}$$

Platí

$$\mathbf{r}\times\left[\mathbf{E}_\perp\times\left(grad\ A_i\times\mathbf{u}_i\right)\right]=\left(\mathbf{r}\times grad\ A_i\right)\left(\mathbf{E}_\perp\mathbf{u}_i^2\right)-\left(\mathbf{r}\times\mathbf{u}_i\right)\left(\mathbf{E}_\perp\ grad\ A_i\right). \tag{6.58}$$

Proto

$$\mathbf{I}=\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{3}\int_V E_{\perp i}\left(\mathbf{r}\times grad\ A_i\right)dV+\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{3}\int_V\left(\mathbf{u}_i\times\mathbf{r}\right)\left(\mathbf{E}_\perp\ grad\ A_i\right)dV=$$
$$=\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{3}\int_V\frac{\partial A_i}{\partial t}\left(\mathbf{r}\times grad\ A_i\right)dV-\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{3}\int_V\left(\mathbf{u}_i\times\mathbf{r}\right)\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\ grad\ A_i\right)dV. \tag{6.59}$$

Vztahem (6.59) je určen impulsmoment záření elektromagnetického pole, rozdělený na dvě části – na orbitální moment záření a spin záření. Impuls podélného pole definujeme analogicky podle vztahu

$$\mathbf{X}'=\frac{1}{c^2}\int_V\left(\mathbf{E}_\parallel\times\mathbf{H}\right)dV. \tag{6.60}$$

Protože

$$\mathbf{E}_\parallel\times\mathbf{H}=-grad\ \varphi\times\mathbf{H}=-rot\left(\varphi\mathbf{H}\right)+\varphi\ rot\ \mathbf{H}=rot\left(\varphi\mathbf{H}\right)+\varphi\ rot\ rot\ \mathbf{A}=$$
$$=-rot\left(\varphi\mathbf{H}\right)+\varphi\ grad\ div\ \mathbf{A}-\varphi\cdot\Delta\mathbf{A}=-rot\left(\varphi\mathbf{H}\right)-\varphi\cdot\Delta\mathbf{A}. \tag{6.61}$$

Pak

$$\mathbf{X}' = \frac{1}{c^2}\int_V \mathbf{E}_{\|} \times \mathbf{H}\, dV = -\frac{1}{c^2}\int_V rot\left(\varphi \mathbf{H}\right) dV - \frac{1}{c^2}\int_V \varphi\, \Delta\mathbf{A}\, dV =$$
$$= \frac{1}{c^2}\int_S \varphi\left(\mathbf{H}\times\mathbf{n}\right) dS - \frac{1}{c^2}\int_V \varphi\, \Delta\mathbf{A}\, dV. \qquad (6.62)$$

Pro

$$S \to \infty \Rightarrow \int_S \varphi\left(\mathbf{H}\times\mathbf{n}\right) dS \to 0, \qquad (6.63)$$

a tedy

$$\mathbf{X}' = -\frac{1}{c^2}\int_V \varphi\, \Delta\mathbf{A}\, dV. \qquad (6.64)$$

Podle Greenovy věty

$$\int_V \varphi\, \Delta A_j - A_j \Delta\varphi\, dV = \int_S \varphi \frac{\partial A_j}{\partial n} - A_j \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS\,. \qquad (6.65)$$

Pro $S \to \infty$ odpadne plošný integrál a

$$\int_V \varphi\, \Delta A_j\ \Delta V = \int_V A_j\ \Delta\varphi\, \Delta V\,. \qquad (6.66)$$

Souhrnně

$$\int_V \varphi\, \Delta\mathbf{A}\, \Delta V = \int_V \mathbf{A}\, \Delta\varphi\, \Delta V\,. \qquad (6.67)$$

Proto

$$\mathbf{X}' = -\frac{1}{c^2}\int_V \mathbf{A}\, \Delta\varphi\, dV\,. \qquad (6.68)$$

V případě diskrétně rozložených nábojů

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\varepsilon}\sum_n q_n \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}), \qquad (6.69)$$

kde $\mathbf{r}_n$ je polohový vektor n-té částice,
$\mathbf{r}$ je obecný polohový vektor.
Pak

$$\mathbf{X}' = -\frac{1}{c^2}\frac{1}{\varepsilon}\sum_n \int_V \mathbf{A} q_n \delta(\mathbf{r}_n - \mathbf{r})\, dV = \frac{1}{\varepsilon c^2}\sum_n q_n \mathbf{A}(n). \qquad (6.70)$$

Vztahem (6.70) je určen impuls podélného elektromagnetického pole. Úplný impuls elektromagnetického pole s nabitými částicemi je dán součtem impulsů částic a impulsů záření a podélného pole.

$$\mathbf{P}_c = \mathbf{X}_z + \mathbf{X}_{\|} + \sum_n \mathbf{P}_n , \qquad (6.71)$$

kde $\mathbf{P}_n$ je impuls n-té částice.
Po dosazení

$$\mathbf{P}_c = \mathbf{X}_z + \frac{1}{\varepsilon c^2}\sum_n q_n \mathbf{A}(n) + \sum_n \mathbf{P}_n . \qquad (6.72)$$

Celkový impuls vztahující se na n-tou částici označíme

$$\mathbf{P}_{cn} = \mathbf{P}_n + \frac{q_n \mathbf{A}(n)}{\varepsilon c^2}, \qquad (6.73)$$

odkud

$$\mathbf{P}_c = \sum_n \mathbf{P}_{cn} + \mathbf{X}_z . \qquad (6.74)$$

Vztahem (6.74) je určen úplný impuls elektromagnetického pole s nabitými částicemi.

Pro celkovou bilanci pondermotorického působení elektromagnetického pole platí

$$div\,\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{E}q + \mu_0\left(\mathbf{J}\times\mathbf{H}\right) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right), \qquad (\,6.75\,)$$

kde $\hat{\mathbf{S}}$ je tzv. **tenzor Maxwellova pnutí ve třírozměrném prostoru**,
$\mathbf{J}$ proudová hustota.
Platí:

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}_e + \hat{\mathbf{S}}_m, \qquad (\,6.76\,)$$

kde

$$\hat{\mathbf{S}}_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 E_1^2 - \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 & \varepsilon_0 E_1 E_2 & \varepsilon_0 E_1 E_3 \\ \varepsilon_0 E_1 E_2 & \varepsilon_0 E_2^2 - \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 & \varepsilon_0 E_2 E_3 \\ \varepsilon_0 E_1 E_3 & \varepsilon_0 E_2 E_3 & \varepsilon_0 E_3^2 - \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 \end{pmatrix}, \qquad (\,6.77\,)$$

je tenzor elektrického pole, a

$$\hat{\mathbf{S}}_m = \begin{pmatrix} \mu_0 H_1^2 - \frac{\varepsilon_0}{2}H^2 & \mu_0 H_1 H_2 & \mu_0 H_1 H_3 \\ \mu_0 H_1 H_2 & \mu_0 H_2^2 - \frac{\varepsilon_0}{2}H^2 & \mu_0 H_2 H_3 \\ \mu_0 H_1 H_3 & \mu_0 H_2 H_3 & \mu_0 H_3^2 - \frac{\varepsilon_0}{2}H^2 \end{pmatrix}, \qquad (\,6.78\,)$$

je tenzor magnetického pole.
Proto objemovou hustotu Lorentzovy síly platí

$$\mathbf{f} = \mathbf{E}q + \mu_0\left(\mathbf{J}\times\mathbf{H}\right), \qquad (\,6.79\,)$$

a srovnáním s (6.75) pro ni dostáváme vztah

$$\mathbf{f} = div\,\mathbf{S} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}). \qquad (6.80)$$

Čtyřvektor objemové hustoty Lorenzovy síly má složky

$$\mathbf{f}^{(4)} = \left(f_1,\ f_2,\ f_3, ic\frac{dm}{dt}\right) = \left(\mathbf{f}, ic\frac{dm}{dt}\right) = \left(\mathbf{f}, \frac{i}{c}q(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v})\right), \qquad (6.81)$$

jde-li o vnější sílu vztahující se k nabité částici s nábojem q a rychlostí $\mathbf{v}$. Z Maxwellovy – Lorenzovy rovnice vyplývá

$$rot\ \mathbf{H} = -\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = q\mathbf{v}, \qquad (6.82)$$

kde $q\mathbf{v}$ je hustota konvekčního proudu jedné částice s nábojem q, a proto

$$f_4 = \frac{i}{c}\left[(\mathbf{E}\ rot\ \mathbf{H}) - \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}\right]. \qquad (6.83)$$

S použitím vektorové identity

$$(\mathbf{E}\ rot\ \mathbf{H}) = div(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) - \frac{\mu_0}{2}\frac{\partial H^2}{\partial t} \qquad (6.84)$$

a při zavedení čtvrtého rozměru předpisem

$$x_4 = ict, \qquad (6.85)$$

dostaneme pro čtvrtou komponentu objemové hustoty vnější síly

$$f_4 = \frac{i}{c}div\,(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_4}\left(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2\right). \qquad (6.86)$$

Rozepíšeme vztahy (6.80) a (6.86) do složek

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \frac{\partial S_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{13}}{\partial x_3} - \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial x_4}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_1 \,, \\
f_2 &= \frac{\partial S_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{23}}{\partial x_3} - \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial x_4}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_2 \,, \\
f_3 &= \frac{\partial S_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{33}}{\partial x_3} - \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial x_4}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_3 \,, \\
f_4 &= \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_1 + \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial x_2}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_2 + \\
&= \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial x_3}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_4}\left(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2\right),
\end{aligned}
\qquad (\ 6.87\ )
$$

kterožto soustavu můžeme zapsat v kompaktní formě jako

$$\mathbf{f}_4 = div\,\hat{\Theta}, \qquad (\ 6.88\ )$$

kde $\hat{\Theta}$ je **tenzor Maxwellova pnutí ve čtyřrozměrném prostoru**

$$
\hat{\Theta} = \begin{pmatrix}
S_{11} & S_{12} & S_{13} & \frac{i}{c}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_1 \\
S_{21} & S_{22} & S_{23} & \frac{i}{c}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_2 \\
S_{31} & S_{32} & S_{33} & \frac{i}{c}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_3 \\
\frac{i}{c}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_1 & \frac{i}{c}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_2 & \frac{i}{c}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_3 & \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2\right)_1
\end{pmatrix}.
\qquad (\ 6.89\ )
$$

Vztahem (6.89) je popsána v kovariantní formě závislost Maxwellova pnutí a impulsu elektromagnetického pole na složkách vnější síly a změně hmotnosti částice.
Ze silové rovnice tedy dostáváme

$$\frac{d\mathbf{P}_c}{dt} = \int_V \mathbf{f}\; dV = \int_V div\,\hat{\Theta} - \frac{1}{c^2}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right) dV\,, \qquad (\ 6.90\ )$$

kde

$$\int_V div\,\mathbf{S}\; dV = \int_S \mathbf{S}_n\mathbf{n}\; dS\,. \qquad (\ 6.91\ )$$

Pak

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{P}_c + \frac{1}{c^2}\int_V \left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right) dV\right) = \int_S \mathbf{S}_n\mathbf{n}\; dS\,. \qquad (\ 6.92\ )$$

Pro

$$S \to \infty \Rightarrow \int_S \mathbf{S}_n\mathbf{n}\; dS \to 0\,, \qquad (\ 6.93\ )$$

Odkud

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{P}_c + \mathbf{P}_p\right) = 0\,, \qquad (\ 6.94\ )$$

tj.

$$\mathbf{P}_c + \mathbf{P}_p = konst. \qquad (\ 6.95\ )$$

Tímto vztahem je popsán zákon zachování impulsu v neomezeném prostoru.
Čtvrtou složku objemové hustoty vnější síly danou vztahem (6.86) rozepíšeme v ekvivalentní podobě

$$ic\frac{dm_c}{dt} = ic\; div\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right) + \frac{1}{2ic}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right), \qquad (\ 6.96\ )$$

kde

$$m_c = \int_V m \, dV \qquad (6.97)$$

je celková hmotnost částic v prostoru.
Pak

$$ic\frac{dm_c}{dt} = \frac{i}{c}\int_V div\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right) dV + \frac{1}{2ic}\frac{d}{dt}\int_V \left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right) dV\,, \qquad (6.98)$$

z čehož

$$ic\frac{dm_c}{dt} = \frac{i}{c^2}\int_S \left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)\cdot\mathbf{n}\, dS + \frac{1}{2c^2}\frac{d}{dt}\int_V \left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right) dV\,. \qquad (6.99)$$

Pro

$$S \to \infty \Rightarrow \int_S \left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)\cdot\mathbf{n}\, dS \to 0\,, \qquad (6.100)$$

takže

$$\frac{d}{dt}\left(m_c c^2 + W_c\right) = 0\,, \qquad (6.101)$$

kde

$$W_c = \frac{1}{2}\int_V \left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right) dV\,, \qquad (6.102)$$

je celková energie elektromagnetického pole a $m_c c^2$ je energie částic.
Odtud plyne Zákon zachování energie elektromagnetického pole
v neomezeném prostoru:

$$m_c c^2 + W_c = konst. \qquad (6.103)$$

Podobným způsobem bychom dokázali platnost zákona zachování impulsmomentu elektromagnetického pole s nabitými částicemi v neomezeném prostoru:

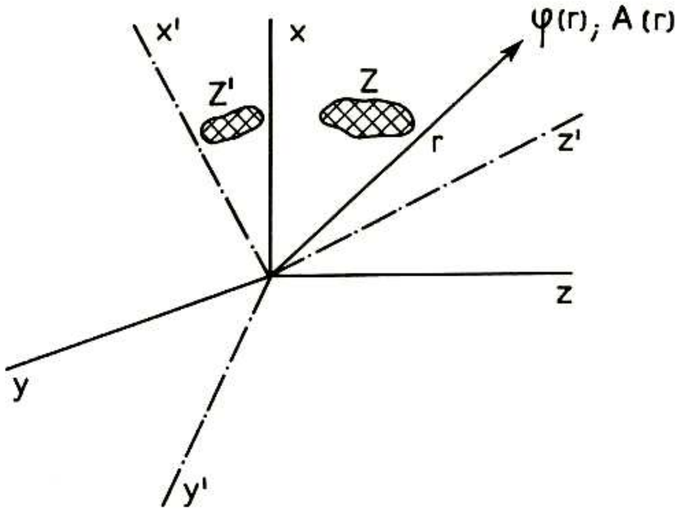
$$\mathbf{r}\times\mathbf{P}+\mathbf{I}_c=konst. \qquad (6.104)$$

kde

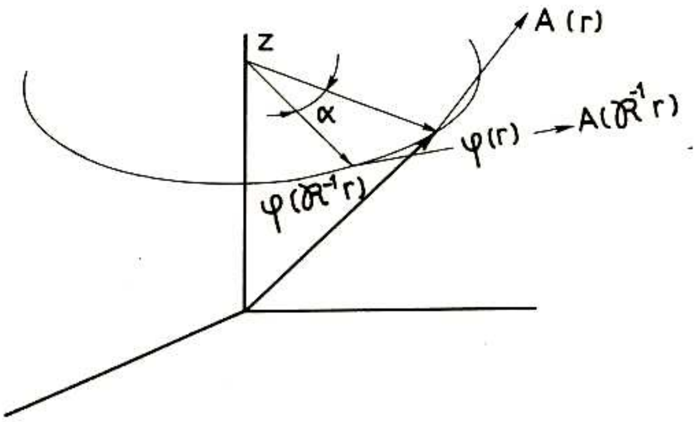
$$\mathbf{I}_c=\frac{1}{c^2}\int_V \mathbf{r}\times\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)dV\,, \qquad (6.105)$$

P je impuls částic, **r** polohový vektor.
Uvažujme zdroj elektromagnetického pole o skalárním potenciálu $\varphi(\mathbf{r})$ a vektorovém potenciálu $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.
Nechť se zdroj elektromagnetického pole (zdroj nábojů a proudů) pootočí kolem počátku souřadného systému (viz obr. 6.1).
Zdroj v pootočené souřadné soustavě vybudí pole určené skalárním potenciálem $\varphi'(\mathbf{r})$.
Velikost tohoto potenciálu bude stejná, jakou by zdroj pole vybudil v původní, nečárkované soustavě.

Obr. 6.1



Obr. 2.



Nechť je rotace generována operátorem $\hat{\mathbf{R}}$.
Pak

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{R}}\varphi(\mathbf{r}) = \varphi\left(\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{r}\right), \qquad (6.106)$$

kde $\hat{\mathbf{R}}^{-1}$ je operátor zpětné rotace.
Budeme-li uvažovat jednodušší případ otáčení okolo osy *z* o úhel α, bude mít operátor $\hat{\mathbf{R}}$ tvar

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\ 6.107\ )$$

a operátor $\hat{\mathbf{R}}^{-1}$

$$\hat{\mathbf{R}}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (\ 6.108\ )$$

Pak podle (6.25) platí

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \varphi(x, y, z) \\ \varphi'(\mathbf{r}) &= \varphi(x\cos\alpha + y\sin\alpha, -x\sin\alpha + y\cos\alpha, z). \end{aligned} \qquad (\ 6.109\ )$$

Nechť vybudí zdroj v místě **r** vektorový potenciál **A** (**r**).
Při otočení se dostane bod o polohovém vektoru $\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{r}$ do bodu o polohovém vektoru **r**.
Měl-li vektorový potenciál v bodě $\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{r}$ složky $A_i(\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{r})$, bude mít po pootočení složky

$$\begin{aligned} A'_x &= A_x\left(\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{r}\right)\cos\alpha - A_y\left(\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{r}\right)\sin\alpha, \\ A'_y &= A_x\left(\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{r}\right)\sin\alpha - A_y\left(\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{r}\right)\cos\alpha, \\ A'_z &= A_z\ , \end{aligned} \qquad (\ 6.110\ )$$

což lze vyjádřit v kompaktním operátorovém tvaru

$$\mathbf{A}' = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{A}\left(\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{r}\right). \qquad (\ 6.111\ )$$

Uvažujme nyní otočení o velmi malý úhel ε.
Rozložíme goniometrické funkce v Tailorovu řadu a při velmi malém úhlu zanedbáme členy vyšších řádů:

$$\hat{\mathbf{R}}_z(\alpha)\left[\varphi(x, y, z)\right] \cong \varphi(x+\varepsilon y\,; -x\varepsilon + y\,; z) =$$

$$= \varphi(x, y, z) + \varepsilon y \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varepsilon x \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \qquad (6.112)$$

$$= \varphi(x, y, z) + \varepsilon\left(y \frac{\partial\varphi}{\partial x} - x \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right).$$

Vlnová funkce Ψ v kvantové mechanice odpovídá výchylce vlnění v klasické mechanice.
Rozdíl je však v tom, že Ψ není sama o sobě přímo měřitelnou veličinou a může být proto komplexní.
Proto ji budeme ve směru *z* psát ve tvaru

$$\Psi = A\exp\left[-i\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right]. \qquad (6.113)$$

Dosadíme-li v tomto výrazu $2\pi\nu$ za ω a λf za v, dostaneme

$$\Psi = A\exp\left[-2\pi i\left(f \cdot t - \frac{z}{\lambda}\right)\right]. \qquad (6.114)$$

protože

$$E = h \cdot f = 2\pi\hbar f \qquad (6.115)$$

a

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p}, \qquad (6.116)$$

máme

$$\Psi = A\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(Et - pz)\right]. \qquad (6.117)$$

Výraz (6.117) je matematickým popisem vlnového ekvivalentu volné částice s celkovou energií *E* a hybností *p*, pohybující se ve směru +*z*, stejně, jako je výraz (6.113) matematickým popisem výchylky harmonické vlny šířící se volně podél napjaté struny.
Zderivováním (6.117) podle *z* a *t* dostaneme

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{i}{\hbar} p\Psi, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E\Psi, \tag{6.118}$$

což lze přepsat v podnětném tvaru

$$p\Psi = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}\Psi, \qquad E\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi. \tag{6.119}$$

Dynamická veličina *p* odpovídá diferenciálnímu operátoru $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}$ a podobně dynamická veličina *E* odpovídá diferenciálnímu operátoru $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$.
Operátor hybnosti má tedy tvar

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{6.120}$$

a operátor celkové energie

$$\hat{\mathbf{E}} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \tag{6.121}$$

Definujme **kinetický moment** jako

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}} . \tag{6.122}$$

Pak

$$\begin{aligned}\mathbf{l} &= \mathbf{x}_0 \left(yp_z - zp_y \right) + \mathbf{y}_0 \left(zp_x - xp_z \right) + \mathbf{x}_0 \left(xp_y - yp_x \right) = \\ &= -i\hbar \mathbf{x}_0 \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) - i\hbar \mathbf{y}_0 \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) - i\hbar \mathbf{z}_0 \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).\end{aligned} \tag{6.123}$$

Srovnáme-li vztahy (6.112) a (6.123), zjistíme, že

$$\hat{\mathbf{R}}_z \left(\varepsilon \right) \left[\varphi \left(x, y, z \right) \right] \rightarrow \varphi \left(x, y, z \right) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} l_z \varphi \left(x, y, z \right) = \left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} l_z \right) \varphi \left(x, y, z \right) . \tag{6.124}$$

Obecně lze dokázat, že

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \hat{\mathbf{R}}_z \left(\varepsilon \right) \equiv \hat{\mathbf{R}}_u \left(\varepsilon \right) = 1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \left(\mathbf{l} \cdot \mathbf{u} \right) , \tag{6.125}$$

kde $\hat{\mathbf{R}}_u \left(\varepsilon \right)$ je operátor infinitesimálního otočení okolo osy, jejíž směr je určen jednotkovým vektorem **u**.
Vztah (6.125) platí i pro soustavu *N* částic s celkovým kinetickým momentem **L**.
Transformace skalární funkce v *N*-rozměrném prostoru pak bude

$$\hat{\mathbf{R}}_z \left(\varepsilon \right) \left[\varphi \left(r_1, r_2, \ldots, r_N \right) \right] = \left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \left(\mathbf{L} \cdot \mathbf{u} \right) \right) \varphi \left(r_1, r_2, \ldots, r_N \right) , \tag{6.126}$$

takže

$$\hat{\mathbf{R}}_u \left(\varepsilon \right) = 1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \left(\mathbf{L} \cdot \mathbf{u} \right) . \tag{6.127}$$

Obecně platí: je-li **J** celkový kinetický moment soustavy, pak $\hat{\mathbf{R}}_u(\varepsilon)$ je operátor infinitesimální rotace okolo osy, jejíž směr je určen jednotkovým vektorem **u**, platí-li:

$$\hat{\mathbf{R}}_u(\varepsilon) = 1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar}(\mathbf{J}\cdot\mathbf{u}). \tag{6.128}$$

Nechť každému bodu prostoru, určenému polohovým vektorem **r**, přísluší vektorová funkce **A**(**r**).
Pak prostorovou závislostí této vektorové funkce je definováno vektorové pole.
Pro transformaci vektorové funkce jsme odvodili vztah (6.111).
Při otáčení okolo osy z platí:

$$\mathbf{A}' = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{A}\left(\hat{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{r}\right). \tag{6.129}$$

Při infinitesimální transformaci $\varepsilon \to 0$ pak po rozepsání do složek dostaneme:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} A'_x(r) &= A_x(x+\varepsilon y, -\varepsilon x + y, z) - A_y(x+\varepsilon y, -\varepsilon x + y)\varepsilon,\\
\lim_{\varepsilon\to 0} A'_y(r) &= A_x(x+\varepsilon y, -\varepsilon x + y, z)\varepsilon + A_y(x+\varepsilon y, -\varepsilon x + y, z),\\
\lim_{\varepsilon\to 0} A'_z(r) &= A_z(x+\varepsilon y, -\varepsilon x + y, z),
\end{aligned} \tag{6.130}$$

z čehož

$$\begin{aligned}
A'_x &= A_x(x,y,z) + \varepsilon y\frac{\partial A_x}{\partial x} - \varepsilon x\frac{\partial A_y}{\partial y} - \varepsilon A_y(x,y,z) - \varepsilon^2 y\frac{\partial A_x}{\partial x} + \varepsilon^2 x\frac{\partial A_y}{\partial y},\\
A'_x &= \varepsilon A_x(x,y,z) + \varepsilon^2 y\frac{\partial A_x}{\partial x} - \varepsilon^2 x\frac{\partial A_x}{\partial y} + A_y(x,y,z) + \varepsilon y\frac{\partial A_y}{\partial x} - \varepsilon y\frac{\partial A_y}{\partial y},\\
A'_z &= A_z(x,y,z) + \varepsilon y\frac{\partial A_z}{\partial x} - \varepsilon x\frac{\partial A_z}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{6.131}$$

Uvážíme-li definici kinetického momentu podle infinitesimálního otočení, upravíme (6.131) tak, že po zanedbání veličin druhého řádu

$$A'_x = A_x\left(x, y, z\right) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} l_z A_x\left(x, y, z\right) - \varepsilon A_y\left(x, y, z\right),$$
$$A'_y = A_x\left(x, y, z\right) + A_y\left(x, y, z\right) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} l_z A_y\left(x, y, z\right), \qquad (6.132)$$
$$A'_z = A_z\left(x, y, z\right) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} l_z A_z\left(x, y, z\right).$$

Tyto tři rovnice lze souhrnně psát tak, že

$$\hat{\mathbf{R}}_z\left(\varepsilon\right)\left[\mathbf{A}\right] = \left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar}\left(\mathbf{l}_z + \mathbf{s}_z\right) A\right), \qquad (6.133)$$

kde operátor $\mathbf{s}_z$ je reprezentován maticí

$$\mathbf{s}_z = \frac{1}{\hbar}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (6.134)$$

a

$$\mathbf{s}_z \mathbf{A} = \frac{1}{\hbar}\left(-iA_y \mathbf{x}_0 + iA_x \mathbf{y}_0\right). \qquad (6.135)$$

Operátor $\mathbf{s}_z$ je operátorem přídavného kinetického momentu nazývaného **spin** vektorového pole.
Podobně bychom dokázali, že

$$\mathbf{s}_x = \frac{1}{\hbar}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{s}_y = \frac{1}{\hbar}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (6.136)$$

Ze vztahů (6.134), (6.136) odvodíme operátor $\hat{\mathbf{s}}^2$:

$$\hat{\mathbf{s}}^2 = \mathbf{s}_x^2 + \mathbf{s}_y^2 + \mathbf{s}_z^2. \qquad (6.137)$$

Po dosazení zjistíme, že

$$\hat{\mathbf{s}}^2 = \frac{2}{\hbar}. \qquad (6.138)$$

Pak

$$\hat{\mathbf{s}}^2\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{2}{\hbar}\mathbf{A}(x, y, z). \qquad (6.139)$$

Protože vlastní hodnotu operátoru kvadrátu kinetického momentu a tedy i spinu vyjadřujeme ve tvaru

$$\frac{1}{\hbar}s(s+1), \qquad (6.140)$$

přísluší operátoru spinu $\hat{\mathbf{s}}^2$ vektorového pole spinové číslo $s = 1$.
Vektorové pole je charakterizováno operátorem polohy $\mathbf{r}$, impulsu $\mathbf{p} = i\hbar\nabla$ a spinem $\mathbf{s}$.
Platí při tom důležité identity:

$$rot \equiv (\mathbf{s}\cdot\mathbf{p}), \qquad (6.141)$$

$$\left(\mathbf{s}\cdot\mathbf{p}\right)^2 - p^2 = grad\ div\,, \qquad (6.142)$$

s definicí rotoru

$$rot_x\mathbf{A} = \frac{1}{\hbar}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ p_y A_z \\ p_z A_y \end{pmatrix},$$

$$rot_y\mathbf{A} = \frac{1}{\hbar}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_z A_x \\ 0 \\ p_x A_z \end{pmatrix}, \qquad (6.143)$$

$$rot_z\mathbf{A} = \frac{1}{\hbar}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x A_y \\ p_y A_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podle uvedených vztahů můžeme vyjádřit klasické vektorové diferenciální operátory v Maxwellových rovnicích operátorem spinu a impulsu elektromagnetického pole.
Definujme **operátor parity P**:

$$\mathbf{PB}\left(\mathbf{r}\right) = -\mathbf{B}\left(-\mathbf{r}\right), \qquad (6.144)$$

kde **B**(**r**) je veličina vektorového pole, **r** polohový vektor.
Aplikujeme-li ještě jednou operátor **P** na obě strany rovnosti (6.144), dostaneme

$$\mathbf{P}^2\mathbf{B}\left(\mathbf{r}\right) = \mathbf{B}\left(\mathbf{r}\right), \qquad (6.145)$$

a proto

$$\mathbf{P}^2 = 1. \qquad (6.146)$$

Vlastní hodnota operátoru $\mathbf{P}^2$ je tedy 1 a vlastní hodnoty operátoru **P** jsou ±1.

Prvnímu z nich přísluší sudá parita, druhému lichá.
Maxwellovy rovnice rozepsané do složek tvoří soustavu simultánních diferenciálních rovnic prvního řádu.
Na základě gradientní invariance je lze převést na diferenciální rovnici druhého řádu pro pomocnou skalární veličinu, ze které umíme s pomocí diferenciálních operátorů určit jednotlivé složky elektromagnetického pole.
Přitom podmínky, za kterých jest to možno provést závisejí na vlastnostech příslušných Laméových koeficientů charakterizujících daný souřadný systém.

Père de Gabriel Léon Jean Baptiste Lamé
(1795 – 1870)

Označíme-li u_1, u_2, u_2 obecné ortogonální souřadnice a h_1, h_2, h_2 odpovídající Laméovy koeficienty, lze tyto podmínky vyjádřit ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_1}{h_3}\right) = 0\,,$$
$$\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_3}{h_2}\right) = 0\,, \qquad (\ 6.147\ )$$

přičemž Laméův koeficient $h_1 = 1$.
Za těchto podmínek lze zavést pomocnou skalární veličinu a sestavit pro ni diferenciální rovnici druhého řádu (pro izotropní prostředí), která nemusí být totožná s vlnovou nebo Poissonovou rovnicí.
Má-li být vlnovou rovnicí, musí Laméovy koeficienty splňovat další podmínku:

$$\frac{\partial}{\partial u_1} = \left(h_2 h_3\right) = 0\,. \qquad (\ 6.148\ )$$

U ortogonální a cylindrické soustavy souřadnic jsou splněny všechny 3 uvedené podmínky kladené na Laméovy koeficienty, a proto příslušná diferenciální rovnice pomocné veličiny, která se nazývá **Hertzův vektor**, je totožná s vlnovou rovnicí.
Ve sférických souřadnicích není splněna podmínka (6.148) a příslušná diferenciální rovnice není totožná s vlnovou rovnicí.
Protože při studiu parity elektromagnetického pole bude výhodné zavést právě sférické souřadnice, vyšetříme tento případ podrobněji.
Předpokládejme, že intenzita elektrického a magnetického pole jsou vektorové funkce závislé na polohovém vektoru a na čase.
V izotropním prostředí bez proudových a nábojových zdrojů platí Maxwellovy – Lorenzovy rovnice

$$\begin{aligned} &rot\ \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,, \\ &rot\ \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\,. \end{aligned} \qquad (\ 6.149\ )$$

Proveďme Fourierovu transformaci levých a pravých stran podle obecného vztahu

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}\left(\mathbf{r},t\right)\exp\left(-i\omega t\right)dt = f\left(\mathbf{r},\omega\right), \\ &\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathbf{F}\left(\mathbf{r},t\right)}{\partial t}\exp\left(-i\omega t\right)dt = i\omega f\left(\mathbf{r},\omega\right), \end{aligned} \qquad (\ 6.150\ )$$

kde $\mathbf{f}(\mathbf{r},\omega)$ je Fourierův obraz vektorové funkce $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$.
Přitom předpokládáme, že integrály na levé straně (6.150) jsou konečné. Pak

$$rot\,\mathbf{H}(\mathbf{r},\omega) = i\omega\varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega),$$
$$rot\,\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) = -i\omega\varepsilon\mathbf{H}(\mathbf{r},\omega). \qquad (6.151)$$

podaří-li se vyřešit tyto rovnice, určíme časovou závislost obecné veličiny **F** zpětnou Fourierovou transformací.
Vyjádříme-li vektorové vztahy (6.151) ve sférických souřadnicích a uvážíme-li, že v prostředí bez zdrojů

$$div\,\mathbf{E} = 0,$$
$$div\,\mathbf{H} = 0, \qquad (6.152)$$

odvodíme pro pomocnou skalární veličinu ϕ diferenciální rovnici ve sférických souřadnicích

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\delta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\delta\frac{\partial\phi}{\partial\delta}\right)\right] + k^2\phi = 0, \qquad (6.153)$$

kde r je velikost polohového vektoru, φ azimutální souřadnice a δ doplněk úhlové výšky.
Známe-li průběh pomocné skalární veličiny ϕ, určíme Fourierův obraz intenzity elektrického a magnetického pole příčné elektrické (TE) a magnetické (TM) vlny:

$$\mathbf{E}_{\mathrm{TM}} = grad\,\frac{\partial\phi}{\partial r} + k^2\phi\mathbf{r},$$
$$\mathbf{H}_{\mathrm{TM}} = i\omega\varepsilon\; rot(\phi\mathbf{r}),$$
$$\mathbf{E}_{\mathrm{TE}} = -i\omega(\psi\mathbf{r}), \qquad (6.154)$$
$$\mathbf{H}_{\mathrm{TE}} = grad\,\frac{\partial\psi}{\partial r} + k^2\psi\mathbf{r},$$

kde $\mathbf{E}_{\mathrm{TM}}$, $\mathbf{H}_{\mathrm{TM}}$ je intenzita elektrického, resp. magnetického pole příčné magnetické vlny, $\mathbf{E}_{\mathrm{TE}}$, $\mathbf{H}_{\mathrm{TE}}$ intenzita elektrického, resp. magnetického pole příčné elektrické vlny. Přitom u příčného elektrického resp.

magnetického pole nemá intenzita elektrického resp. magnetického pole složku ve směru jednotkového vektoru **r**.
ϕ, ψ jsou pomocné skalární veličiny vyhovující diferenciální rovnici (6.153).
Obecné elektromagnetické pole se skládá z pole příčně magnetického a příčně elektrického.
Proto

$$\mathbf{E} = grad\,\frac{\partial \phi}{\partial r} + k^2 \phi \mathbf{r} - i\omega\mu\; rot(\psi \mathbf{r}),$$
$$\mathbf{H} = grad\,\frac{\partial \psi}{\partial r} + k^2 \psi \mathbf{r} - i\omega\varepsilon\; rot(\phi \mathbf{r}). \qquad (6.155)$$

Uvážíme-li Maxwellovy rovnice (6.151), lze předešlé vztahy upravit do tvaru

$$\mathbf{E} = rot\; rot(\phi \mathbf{r}) - i\omega\mu\; rot(\psi \mathbf{r}),$$
$$\mathbf{H} = rot\; rot(\psi \mathbf{r}) - \frac{1}{i\omega\mu}\, rot\; rot\; rot(\phi \mathbf{r}). \qquad (6.156)$$

Protože je magnetické pole vždy vírové, předpokládejme, že

$$\mathbf{H} = rot\; \mathbf{A}, \qquad (6.157)$$

kde **A** je vektorový potenciál.
Pak, srovnáme-li tento vztah s druhým vztahem (6.156), zjistíme, že při vhodné kalibraci je

$$\mathbf{A} = rot(\psi \mathbf{r}) - \frac{1}{i\omega\mu}\, rot\; rot(\phi \mathbf{r}). \qquad (6.158)$$

Ze vztahů (6.156), (6.158) vyplývá, že v případě pole bez zdrojů má intenzita elektrického a magnetického pole i vektorový potenciál vírový charakter.
Označme

$$\mathbf{M} = rot(\phi\mathbf{r}),$$
$$\mathbf{N} = rot(\psi\mathbf{r}). \qquad (6.159)$$

Pak

$$\mathbf{E} = rot\ \mathbf{M} - i\omega\mu\mathbf{N},$$
$$\mathbf{H} = rot\ \mathbf{N} - \frac{1}{i\omega\mu} rot\ rot\ \mathbf{M}, \qquad (6.160)$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{N} - \frac{1}{i\omega\mu} rot\ \mathbf{M}.$$

Srovnáním první a třetí rovnice (6.160) vidíme, že

$$\mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{A}. \qquad (6.161)$$

Všechny veličiny v předešlých vztazích jsou Fourierovy obrazy.
Budou-li v prostoru proudové a nábojové zdroje, pak

$$div\ \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}. \qquad (6.162)$$

V tomto případě platí vztahy (6.17), (6.18), (6.19).
Nechť skalární funkce φ v rovnosti (6.19) vyhovuje diferenciální rovnici (6.153).
Označme

$$\mathbf{L} = grad\ \varphi. \qquad (6.163)$$

Pak soustava vektorů **L**, **M**, **N** určuje zcela průběh elektromagnetického pole ve sférických souřadnicích.
Intenzita elektrického pole vyhovuje ve všech ortogonálních bázích operátorové rovnici

$$rot\ rot\ \mathbf{E} = k^2\mathbf{E}, \qquad (6.164)$$

kde k je vlnové číslo.
Dosadíme-li do této rovnice za intenzitu elektrického pole příslušný výraz z (6.160), dostaneme

$$rot\ rot\ rot\ \mathbf{M} - i\omega\mu\ rot\ rot\ \mathbf{N} = k^2\ rot\ \mathbf{M} - k^2 i\omega\mu\mathbf{N}, \qquad (6.165)$$

přičemž vektory **M**, **N** vyhovují stejné diferenciální rovnici, avšak liší se integračními konstantami (okrajovými podmínkami).
Rovnice (6.165) musí platit identicky pro všechny polohové vektory **r**.
Proto musí být

$$\begin{aligned} &rot\ rot\ rot\ \mathbf{M} = k^2\ rot\ \mathbf{M}, \\ &rot\ rot\ \mathbf{N} = k^2\mathbf{N}. \end{aligned} \qquad (6.166)$$

Z první rovnice (6.166) vyplývá, že při vhodné kalibraci také

$$rot\ rot\ \mathbf{M} = k^2\mathbf{M}. \qquad (6.167)$$

Z rovnic (6.166), (6.167) vyplívá, že vektory **M** a **N** jsou vlastními vektory operátoru *rot rot* a že jim přísluší vlastní hodnota k^2.
Z rovnic (6.19), (6.163) lze odvodit, že vektor **L** je rovněž vlastním vektorem operátoru *rot rot*, že mu však přísluší vlastní číslo $k = 0$.
Diferenciální rovnici (6.153) přetransformujeme tak, že za funkci Φ budeme pokládat závisle proměnnou $r\phi$.
Pak

$$\frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\delta}\frac{\partial(r\Phi)}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial\delta}\left(\sin\delta\frac{\partial(r\Phi)}{\partial\delta}\right)\right] + k^2 r\Phi = 0. \qquad (6.168)$$

Z této diferenciální rovnice odvodíme pro Φ diferenciální rovnici

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\delta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial\delta}\left(\sin\delta\frac{\partial\Phi}{\partial\delta}\right)\right] + k^2\Phi = 0. \qquad (6.169)$$

To je vlnová rovnice skalární funkce Φ, vyjádřená ve sférických souřadnicích.

Friedrich Wilhelm Bessel (1784 - 1846)

Její řešení je

$$\Phi(r,\delta,\varphi) = C_1 \frac{1}{\sqrt{kr}} Z_{l+1/2}(kr) P_l^{(m)}(\cos\delta)_{\sin(m\varphi)}^{\cos(m\varphi)} \ , \qquad (\ 6.170\ )$$

kde C_1 je integrační konstanta,
$Z_{l+1/2}(kr)$ obecná Bessellova funkce $\left(l+\frac{1}{2}\right)$-tého řádu,
P přidružené Legendreovy polynomy,
$l = 0, 1, 2, \dots$,
$m = -l, -(l+1), \dots , l$.

Známe-li funkci Φ, určíme ϕ podle vztahu:

$$\phi = r\Phi = C_1 \sqrt{\frac{r}{k}} Z_{l+1/2}(kr) P_l^{(m)}(\cos\delta)_{\sin(m\varphi)}^{\cos(m\varphi)} \ . \qquad (\ 6.171\ )$$

Podobně

$$\psi = C_2 \sqrt{\frac{r}{k}} Z_{l+1/2}\left(kr\right) P_l^{(m)}\left(\cos\delta\right)_{\sin(m\varphi)}^{\cos(m\varphi)} . \qquad (6.172)$$

kde C_2 je integrační konstanta odlišná od C_1.
Obecné elektromagnetické pole se tedy skládá s pole příčně elektrického a příčně magnetického, přičemž pole příčně elektrické je popsáno vektorem **N**, a příčně elektrické vektorem *rot* **M**.
Zjistíme nyní paritu těchto vektorů.
Podle (6.159)

$$\mathbf{N} = rot\left(\psi r\right) = \frac{1}{r^2 \sin\delta} \begin{vmatrix} \mathbf{r}_0 & \boldsymbol{\delta}_0 & r\sin\left(\delta \boldsymbol{\varphi}_0\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \delta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ \psi & 0 & 0 \end{vmatrix} , \qquad (6.173)$$

kde $\mathbf{r}_0$, $\boldsymbol{\delta}_0$, $\boldsymbol{\varphi}_0$ jsou jednotkové vektory ve směru odpovídajících sférických souřadnic.
Z předešlého vyplývá, že

$$\begin{aligned} N_r &= 0 , \\ N_\delta &= C_1 \frac{\pm m}{\sin\delta} \sqrt{\frac{r}{k}} Z_{l+1/2}\left(kr\right) P_l^{(m)}\left(\cos\delta\right)_{\cos(m\varphi)}^{\sin(m\varphi)} , \\ N_\varphi &= -C_1 \sqrt{\frac{r}{k}} Z_{l+1/2}\left(kr\right) \frac{1}{2} \cdot \\ &\quad \cdot \left[\left(l-m+1\right)\left(l+m\right) P_l^{(m)}\left(\cos\delta\right) - P_l^{(m)}\left(\cos\delta\right)\right]_{\sin(m\varphi)}^{\cos(m\varphi)} . \end{aligned} \qquad (6.174)$$

Protože operátor parity je definován ve sférických souřadnicích vztahem

$$\mathbf{PN} = -\mathbf{N}\left(-\mathbf{r}\right) = -\mathbf{N}\left(r, \pi-\delta, \varphi+\pi\right), \qquad (6.175)$$

zjistíme, při použití identity

$$\frac{\partial P_l^{(m)}(\cos\delta)}{\partial\delta} = \frac{1}{2}\Big[(l-m+1)(l+m)P_l^{(m-1)}(\cos\delta) - P_l^{(m+1)}(\cos\delta)\Big], \qquad (6.176)$$

že

$$\mathbf{PN} = (-1)^l\,\mathbf{N}. \qquad (6.177)$$

Podobným způsobem bychom dokázali, že

$$\mathrm{P}(rot\mathbf{M}) = (-1)^{l+1}\,rot\mathbf{M}. \qquad (6.178)$$

Ze vztahů (6.177), (6.178) vyplývá, že příčné elektrické a magnetické pole se liší paritou.
Je-li u vidu TE sudá parita, bude u vidu (tm) se stejnými indexy lichá parita a obráceně.
V obecném případě můžeme namísto pole příčně elektrického a příčně magnetického zavést třídění podle sudé a liché parity.
Z (6.120) plyne, že

$$\hat{\mathbf{p}}^2 = -\hbar^2\mathbf{\Delta}. \qquad (6.179)$$

Kvadrát impulsu je tedy totožný s Laplaceovým operátorem, až na Planckovou konstantu.
Příslušná operátorová rovnice je vlnovou rovnicí a vlastní číslo Laplaceova operátoru je kvadrátem vlnového čísla *k*.
Ve sférických souřadnicích je vlnová rovnice vyjádřena vztahem (6.169). Operátor impulsmomentu je definován vztahem

$$\mathbf{I} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = -i\hbar(\mathbf{r}\times\nabla). \qquad (6.180)$$

Vyjádříme-li kvadrát impulsmomentu **I** ve sférických souřadnicích, dostaneme diferenciální operátor

$$\mathbf{I}^2 = \frac{1}{\sin\delta}\frac{\partial}{\partial\delta}\left(\sin\delta\frac{\partial}{\partial\delta}\right) + \frac{1}{\sin^2\delta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \qquad (6.181)$$

Jeho vlastní funkce je

$$Y_{l,\,m} = P_l^{(m)}\left(\cos\delta\right)_{\sin(m\varphi)}^{\cos(m\varphi)} \;, \tag{6.182}$$

a vlastní hodnota $l(\,l{+}1\,)$.
Ze vztahů (6.182), (6.171) vyplývá, že část vlastní funkce vztahující se k souřadnicím δ a φ je totožná.
Vzhledem k tomu, že operátor (6.181) nezávisí na souřadnici r, je možno učinit závěr, že operátory $\mathbf{p}^2$ a $\mathbf{I}^2$ vzájemně komutují.
Kvadrát operátoru spinu elektromagnetického pole má, jak jsme již dokázali, vlastní hodnotu $2/\hbar$.
Rozepsáním nejlépe v pravoúhlých souřadnicích lze dokázat, že operátor $\mathbf{s}^2$ komutuje s operátory $\mathbf{p}^2$ a $\mathbf{I}^2$.
Výsledný impulsmoment elektromagnetického pole je dán součtem

$$\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}. \tag{6.183}$$

Přitom platí operátorová rovnice příslušející kvadrátu impulsmomentu $\mathbf{j}^2$ a jeho složce do směru osy sférické soustavy souřadnic:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}Y_{j,m}\left(\delta,\varphi\right) &= j\left(\,j+1\right)Y_{j,m}\left(\delta,\varphi\right), \\ \mathbf{j}_z Y_{j,m}\left(\delta,\varphi\right) &= mY_{j,m}\left(\delta,\varphi\right). \end{aligned} \tag{6.184}$$

Na základě sčítání impulsmomentů platí, že při spinovém čísle elektromagnetického pole s = 1a při dané vlastní hodnotě impulsmomentu $\mathbf{I}$, kterou jsme označili l, mohou nastat tři stavy, jimž příslušejí tři možná čísla j :

$$j = l+1; \qquad j = l\,; \qquad j = l-1\;. \tag{6.185}$$

Každému z čísel j přísluší pak soustava (2j + 1) čísel m :

$$-j\,; \quad -j+1; \quad \ldots \quad ; \quad j\,. \tag{6.186}$$

Přitom pro vlastní funkci $Y_{j,m}(\delta,\varphi)$ platí:

$$Y_{j,m}(\delta,\varphi) = P_j^{(m)}(\cos\delta)_{\cos(m\varphi)}^{\sin(m\varphi)} \ . \qquad (6.187)$$

Při aplikaci operátoru parity na tuto funkci platí, že

$$\mathbf{P}Y_{j,m}(\delta,\varphi) = -Y_{j,m}(\pi-\delta,\varphi+\pi) = (-1)^j Y_{j,m}(\delta,\varphi). \qquad (6.188)$$

Po dosazení za *j* z (6.185) dostaneme tři možné stavy parity:

$$(-1)^{l+1}\ ; \quad (-1)^l\ ; \quad (-1)^{l-1}. \qquad (6.189)$$

Dosaďme za $(l-1) = \varepsilon$.
Potom lze (6.189) vyjádřit v ekvivalentním tvaru jako

$$(-1)^{\varepsilon}\ ; \quad (-1)^{\varepsilon+1}\ ; \quad (-1)^{\varepsilon}, \qquad (6.190)$$

neboť $(-1)^{\varepsilon+2} = (-1)^{\varepsilon}$.
Z předešlého je zřejmé, že lze elektromagnetické pole pokládat za dynamickou soustavu, charakterizovanou kvantovými čísly k^2, j, m, kde k je vlnové číslo, j kvantové číslo příslušející celkovému impulsmomentu elektromagnetického pole, m je kvantové číslo příslušející projekci impulsmomentu j_z .
Další charakteristickou veličinou je parita elektromagnetického pole.
Mohou nastat tři stavy parity pole, z nichž při $j \neq 0$ dva z nich, a to stav s $(-1)^{l+1}$ a $(-1)^l$, příslušejí vírovým složkám pole a jeden se stavem $(-1)^{l-1}$ nevírové složce pole.
Při tom při vírových složkách $k^2 \neq 0$ a při nevírové $k^2 = 0$.
Bude-li $j = 0$, může nastat jediný případ s paritou $P = 1$.
Přitom

$$j^2 Y_{l,m}(\delta,\varphi) = 0, \qquad (6.191)$$

z čehož srovnáním s vlnovou rovnicí vyplyne, že to nastane tehdy, je-li $k^2 = 0$.
Paritě $P = 1$ tak přísluší jen nevírové pole.
Intenzita elektrického a magnetického pole vírové složky jsou (pokud jde o jejich směr) určeny vektory, které jsou kolmé na směr šíření.
Tyto vektory mohou s časem měnit svůj směr i velikost.
Abychom mohli specifikovat časovou změnu směru, určíme dva základní vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$, kolmé na směr šíření, které určují polarizaci elektrického pole.
Složky intenzity elektrického pole do směru $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ mohou být časově obecně závislé.
Budou-li harmonicky časově závislé, půjde obecně o eliptickou polarizaci.
Bude-li rozdíl fáze $\pi/2$, jde o polarizaci kruhovou.
Obyčejně jsou vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ na sebe kolmé a tvoří se směrem šíření ortogonální bázi:

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{k}}{k}, \tag{6.192}$$

K určení polarizace můžeme vzít rovněž za základ dva jednotkové vektory, definující kruhovou polarizaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^+ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2\right), \\ \mathbf{e}^- &= +\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2\right), \end{aligned} \tag{6.193}$$

kde $\mathbf{e}^+$ je jednotkový vektor určující pravotočivou kruhovou polarizaci, $\mathbf{e}^-$ jednotkový vektor určující levotočivou kruhovou polarizaci.
Přepišme nyní vztah (2.32) pro energii osamoceného hmotného bodu s klidovou hmotou m_0 do podoby

$$\frac{W^2}{c^2} = p^2 + m_0^2 c^2 . \tag{6.194}$$

Vynásobením obou stran rovnice (6.194) vlnovou funkcí (6.117) a po dosazení operátoru energie (6.121) a hybnosti (6.120), se nám rovnice (6.194) upraví na tvar

$$\frac{1}{c^2}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi=\left(-i\hbar\nabla\right)^2\psi+m_0^2c^2, \qquad (6.195)$$

což lze dále upravit na

$$-\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\left(-\hbar^2\boldsymbol{\Delta}+m_0^2c^2\right)\psi, \qquad (6.196)$$

nebo na tvar s nulovou pravou stranou

$$\boldsymbol{\Delta}\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\left(\frac{m_0c}{\hbar}\right)^2\psi=0\,. \qquad (6.197)$$

Rovnice (6.197) je známá **Klein – Gordonova rovnice** (Walter Gordon (1893 – 1939)), která tvoří relativistickou kvantovou rovnici pro všechny bosony, tj. částice s celočíselným spinem.
Pro foton (m_0 = 0) se rovnice (6.197) zjednoduší na tvar

$$\Box\psi=\Delta\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0 \qquad (6.198)$$

známé vlnové rovnice elektromagnetického pole (srov. (2.139)).
Dynamický stav záření je určen v každém okamžiku a v každém bodu prostoru vektorovým čtyřpotenciálem **A** a jeho časovou změnou.
Přitom platí rovnice

$$\Box\mathbf{A}=\boldsymbol{\Delta}\mathbf{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=0,$$
$$\operatorname{div}\mathbf{A}=0. \qquad (6.199)$$

Vlnovou rovnici (6.199) řešme metodou separací proměnných.

Předpokládejme řešení ve tvaru:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\sum_n q_n(t)\mathbf{T}_n(\mathbf{r}). \tag{6.200}$$

Přitom $\mathbf{T}_n(\mathbf{r})$ tvoří úplnou soustavu ortogonálních normovacích funkcí, tj.

$$\mathbf{T}_n(\mathbf{r})=\mathbf{T}_n^*(\mathbf{r}). \tag{6.201}$$

Po dosazení do rovnice (6.199) máme

$$\sum_n\left[q_n(t)\boldsymbol{\Delta}\mathbf{T}_n(\mathbf{r})-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 q_n(t)}{\partial t^2}\mathbf{T}_n(\mathbf{r})\right]=0. \tag{6.202}$$

Má-li předešlý vztah platit ve kterémkoli světobodě, musí být

$$q_n(t)\boldsymbol{\Delta}T_n(\mathbf{r})-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 q_n(t)}{\partial t^2}T_n(\mathbf{r})=0. \tag{6.203}$$

Dělme předešlou rovnici výrazem $q_n(t)T_n(\mathbf{r})$.
Pak po separaci proměnných dostáváme

$$\frac{1}{T_n}\boldsymbol{\Delta}T_n(\mathbf{r})-\frac{1}{q_n}\mu\varepsilon\frac{\partial^2 q_n(t)}{\partial t^2}=0. \tag{6.204}$$

V souladu s metodou separace proměnných nechť

$$\frac{1}{T_n}\boldsymbol{\Delta}T_n=-k_n^2. \tag{6.205}$$

Pak

$$\Delta T_n + k_n^2 T_n = 0\,,$$
$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} + \frac{k_n^2}{\mu\varepsilon} q_n = 0\,. \qquad (\ 6.206\ )$$

Označme

$$\frac{k_n^2}{\mu\varepsilon} = \omega_n^2\,. \qquad (\ 6.207\ )$$

Pak

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} + \omega_n^2 q_n = 0\,, \qquad (\ 6.208\ )$$

kde ω_n je vlastní frekvence kmitů elektromagnetického pole, označených indexem n, charakterizovaných prostorovou funkcí $\mathbf{T}_n(\mathbf{r})$.
Kmity elektromagnetického pole, jimž přísluší prostorové uspořádání funkcí $\mathbf{T}_n(\mathbf{r})$, nazýváme vidy elektromagnetického pole.
Rovnice (6.127) je diferenciální rovnicí určující časový průběh kmitů harmonického oscilátoru o frekvenci ω_n^2.
Takovému harmonickému pohybu přísluší hamiltonián

$$h_n = \frac{1}{2}\left(p_n^2 + \omega_n^2 q_n^2 \right), \qquad (\ 6.209\ )$$

kde

$$p_n = \frac{dq_n}{dt}\,. \qquad (\ 6.210\ )$$

Přitom pokládáme $q_n(t)$ za zobecněnou souřadnici a p_n za zobecněný impuls.
Budeme-li znát funkci $\mathbf{T}_n(\mathbf{r})$, určíme vektorový potenciál podle (6.200).
Předpokládejme, že vektorová funkce $\mathbf{T}_n(\mathbf{r})$ tvoří ortogonální posloupnost funkcí.

Pak lze z (6.200) odvodit, že

$$q_n(t) = \frac{1}{M_n}\int_V (\mathbf{T}_n\mathbf{A})\, dV\,, \qquad (\ 6.211\ )$$

$$p_n(t) = \frac{dq_n(t)}{dt} = \frac{1}{M_n}\int_V \left(\mathbf{T}_n \frac{d\mathbf{A}}{dt}\right) dV\,, \qquad (\ 6.212\ )$$

kde V je definiční objem vlastních funkcí $\mathbf{T}_n(\mathbf{r})$, M_n jejich norma. Úplný hamiltonián záření elektromagnetického pole je určen součtem dílčích hamiltoniánů jednotlivých vidů.

$$\mathbf{H}_z = \sum_n \mathbf{h}_n\,. \qquad (\ 6.213\ )$$

Přitom

$$\mathbf{A} = \sum_n q_n \mathbf{T}_n\,,$$
$$\mathbf{E}_\perp = -\mu\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\mu\sum_n p_n\mathbf{T}_n\,. \qquad (\ 6.214\ )$$

O soustředěné energii elektrického vírového pole záření jsme odvodili, že

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon\int_V E_\perp^2\, dV = \frac{1}{2}\varepsilon\mu\sum_n p_n^2\int_V T_n^2\, dV =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\mu}{c^2}\sum_n p_n^2\int_V T_n^2\, dV = \frac{1}{2}\sum_n p_n^2\,, \qquad (\ 6.215\ )$$

kde jsme provedli normování tak, aby

$$\frac{\mu}{c^2}\int_V T_n^2\, dV = 1, \qquad (\ 6.216\ )$$

kde c je rychlost šíření elektromagnetické vlny v prostředí s permitivitou ε a permeabilitou μ .
O soustředěné energii magnetického pole záření platí

$$W_h = \frac{1}{2}\mu\int_V H^2 \, dV = \frac{1}{2}\mu\int_V \left|\mathrm{rot}\ \mathbf{A}\right|^2 dV \, . \qquad (6.217)$$

Podle Greenovy věty

$$\int_V \mathbf{A}\ \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{A}\ dV - \int_V \left|\mathrm{rot}\ \mathbf{A}\right|^2 dV = \int_S \left(\mathbf{A}\times\mathrm{rot}\ \mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{n}\ dS \, , \qquad (6.218)$$

kde S je plocha ohraničující objem V, **n** jednotkový vektor normály na plochu S.
Nechť elektromagnetické pole zaujímá celý prostor.
Pak pro $r \to \infty$ konverguje plošný integrál k nule (na základě principu nevyzařování z nekonečna), a tedy

$$\int_V \left|\mathrm{rot}\ \mathbf{A}\right|^2 dV = \int_S \left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{\Delta A}\right) dV \, , \qquad (6.219)$$

neboť

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{A} = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \mathbf{A} - \mathbf{\Delta A} \qquad (6.220)$$

a při zavedené kalibraci je $\mathrm{div}\ \mathbf{A} = 0$.
Uvážíme-li identity (6.218), (6.219), (6.208), dostaneme po dosazení do (6.218)

$$W_h = -\frac{\mu}{2}\int_V \left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{\Delta A}\right) dV = -\frac{\mu}{2}\int_V \left(\sum_n q_n T_n \sum_m k^2 q_m T_m\right) dV = \frac{1}{2}\sum_n \omega_n^2 q_n^2 \, , \qquad (6.221)$$

Platí-li ortogonalita a normování vlastních funkcí T_n .
Celková energie záření elektromagnetického pole se rovná součtu elektrické a magnetické energie.
Proto podle (6.215) a (6.219)

$$W = \frac{1}{2}\mu\int_V H^2\, dV + \frac{1}{2}\varepsilon\int_V E_\perp^2\, dV = \frac{1}{2}\sum_n \left(p_n^2 + \omega_n^2 q_n^2\right). \qquad (\ 6.222\ )$$

Energii záření přísluší Hamiltonův operátor $\mathbf{H_z}$.
Proto platí pro operátor záření elektromagnetického pole:

$$\mathbf{H}_z = \frac{1}{2}\sum_n \left(\mathbf{p}_n^2 + \omega_n^2 \mathbf{q}_n^2\right), \qquad (\ 6.223\ )$$

kde $\mathbf{q}_n$ je operátor zobecněné souřadnice vidu n, $\mathbf{p}_n$ je operátor zobecněného impulsu vidu n.
Přitom je nutno si uvědomit, že operátoru zobecněné souřadnice přísluší amplituda intenzity magnetického pole vidu n a operátoru impulsu amplituda intenzity elektrického pole vidu n.
Bude-li v prostoru elektromagnetického pole přítomen soubor nabitých částic, bude příslušné elektromagnetické pole popsáno nehomogenní vlnovou rovnicí vektorového potenciálu.
V případě diskrétního rozložení nabitých částic:

$$\mathbf{\Delta A} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\sum_n e_n \mathbf{v}_n \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n\right), \qquad (\ 6.224\ )$$

kde e_n je náboj n-té částice, $\mathbf{v}_n$ rychlost n-té částice, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)$ Diracova delta funkce, $\mathbf{r}$ obecný polohový vektor, $\mathbf{r}_n$ polohový vektor n-té částice.
Dosadíme-li za $\mathbf{A}$ příslušný výraz z (6.200), dostaneme

$$\sum_m \left(q_m \mathbf{\Delta T}_m - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 q_m}{\partial t^2}\mathbf{T}_m \right) = -\sum_n e_n \mathbf{v}_n \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n\right). \qquad (\ 6.225\ )$$

Vynásobíme-li tuto nerovnici skalárním vektorem $\mathbf{T}_q$ a integrujeme přes objem V, dostaneme s uvážením (6.206)

$$\frac{d^2 q_m}{dt^2} + \omega_m^2 q_m = \mu \sum_n e_n \left(\mathbf{v}_n \mathbf{T}_m (n) \right), \qquad (6.226)$$

kde $\mathbf{T}_m(n)$ je vektor vlastní funkce $\mathbf{T}_m$ v místě n-té částice.
Rovnice (6.226) je diferenciální rovnicí pro zobecněnou souřadnici q_m elektromagnetického pole, v jehož prostoru jsou umístěny diskrétně rozložené nabité částice.
Rovnici (6.226) lze rovněž odvodit z kanonických rovnic výsledného hamiltoniánu.
Nechť je výsledný hamiltonián $\mathbf{H}$ funkcí zobecněné souřadnice q_m a impulsu p_m elektromagnetického pole a polohového vektoru $\mathbf{r}$ celkového impulsu $\mathbf{P}_{cn}$ nabitých částic.
Potom

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}\left(q_m, p_m, r_n, P_{cn} \right) = \mathbf{H}_z + \mathbf{H}_c + \sum_n \mathbf{H}_n , \qquad (6.227)$$

kde $\mathbf{H}_z$ je hamiltonián záření elektromagnetického pole, $\mathbf{H}_c$ je hamiltonián vzájemné coulombické interakce mezi částicemi,

$$\mathbf{H}_n = m_n c^2 , \qquad (6.228)$$

kde m_n je hmotnost n-té částice.
Vztah (6.228) upravíme do vhodnějšího tvaru

$$\mathbf{H}_n = m_n c^2 = c^2 \frac{m_{0n}}{\sqrt{1 - \frac{v_n^2}{c^2}}} , \qquad (6.229)$$

kde m_{0n} je klidová hmotnost n-té částice.
Uvážíme-li, že impuls n-té částice

$$\mathbf{p}_n = m_n \mathbf{v}_n , \qquad (6.230)$$

odvodíme z (6.229), že

$$H_n = c^2 \sqrt{m_{0n}^2 + \frac{1}{c^2}\left|\mathbf{p}_{cn} - \frac{e_n}{\varepsilon c^2}\mathbf{A}(n)\right|^2} \,, \qquad (6.231)$$

kde $\mathbf{p}_{cn}$ je výsledný impuls určený vztahem (2.165).
Vztahem (6.231) je určen hamiltonián nabité částice, která je v interakci s elektromagnetickým polem.
Přejdeme-li na základě principu korespondence ke kvantování, nahradíme fyzikální veličiny příslušnými operátory:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}}_{zm} &= \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{p}}_m^2 + \omega_m^2 \hat{\mathbf{q}}_m^2\right), \\ \hat{\mathbf{H}}_z &= \frac{1}{2}\sum_m \left(\hat{\mathbf{p}}_m^2 + \omega_m^2 \hat{\mathbf{q}}_m^2\right), \end{aligned} \qquad (6.232)$$

kde $\hat{\mathbf{p}}_m$ resp. $\hat{\mathbf{q}}_m$ je operátor impulsu resp. zobecněné souřadnice elektromagnetického pole vidu *m*.
Na základě kvantověmechanických pravidel pro jejich komutátor platí

$$\left[\hat{\mathbf{q}}_m, \hat{\mathbf{p}}_m\right] = i\hbar \,. \qquad (6.233)$$

Zaveďme nyní zjednodušenou symboliku:

$$\hat{\mathbf{h}}_{zm} = \aleph_m \hbar \omega_m \,, \qquad (6.234)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_m = \left(\frac{\hbar}{\omega_m}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{Q}}_m^2 \,, \qquad (6.235)$$

$$\hat{\mathbf{p}}_m = \left(\hbar \omega_m\right)^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}_m \,. \qquad (6.236)$$

Pak lze Hamiltonián a komutátor (6.233) psát ve tvaru

$$\aleph_m = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{P}}_m^2 + \hat{\mathbf{Q}}_m^2\right), \tag{6.237}$$

$$\left[\hat{\mathbf{Q}}_m, \hat{\mathbf{P}}_m\right] = i\,. \tag{6.238}$$

Operátory $\aleph_m$, $\hat{\mathbf{P}}_m$, $\hat{\mathbf{Q}}_m$ jsou transformované operátory hamiltoniánu, zobecněného impulsu a zobecněné souřadnice.
Při tom je nutno si uvědomit, že

$$\hat{\mathbf{p}}_m = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_m}, \tag{6.239}$$

a tedy při nově zvolené symbolice

$$\hat{\mathbf{P}}_m = -i \frac{\partial}{\partial Q_m}\,. \tag{6.240}$$

Zaveďme nové kombinované operátory

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_m^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\mathbf{Q}}_m + i\hat{\mathbf{P}}_m\right), \\ \hat{\mathbf{a}}_m^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\mathbf{Q}}_m - i\hat{\mathbf{P}}_m\right). \end{aligned} \tag{6.241}$$

Platí

$$\left[\hat{\mathbf{a}}_m^-, \hat{\mathbf{a}}_m^+\right] = 1. \tag{6.242}$$

Dosadíme-li za $\hat{\mathbf{P}}_m$ a $\hat{\mathbf{Q}}_m$ operátory $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{m}}^+$ a $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{m}}^-$ do (6.188), dostaneme

$$\aleph_m = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{m}}^-\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{m}}^+ + \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{m}}^+\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{m}}^-\right). \tag{6.243}$$

Označme

$$\hat{\mathbf{N}}_m = \hat{\mathbf{a}}^+_{\mathbf{m}} \hat{\mathbf{a}}^-_{\mathbf{m}} \ , \tag{6.244}$$

Pak

$$\aleph_m = \hat{\mathbf{N}}_m + \frac{1}{2}, \tag{6.245}$$

Uvážíme-li (6.242), vyplývají nám odtud identity

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{a}}^- &= \hat{\mathbf{a}}^+\hat{\mathbf{a}}^-\hat{\mathbf{a}}^- = \hat{\mathbf{a}}^-\hat{\mathbf{a}}^+\hat{\mathbf{a}}^- - \hat{\mathbf{a}}^- = \hat{\mathbf{a}}^-\left(\hat{\mathbf{N}} - 1\right), \\ \hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{a}}^+ &= \hat{\mathbf{a}}^+\hat{\mathbf{a}}^-\hat{\mathbf{a}}^- = \hat{\mathbf{a}}^+\left(1 + \hat{\mathbf{a}}^+\hat{\mathbf{a}}^-\right) = \hat{\mathbf{a}}^+\left(\hat{\mathbf{N}} + 1\right). \end{aligned} \tag{6.246}$$

Zavedené operátory $\hat{\mathbf{a}}^+_{\mathbf{m}}$, $\hat{\mathbf{a}}^-_{\mathbf{m}}$, $\hat{\mathbf{N}}$, nazveme po řadě **kreačním operátorem**, **anihilačním operátorem**, **operátorem počtu částic**.
Nechť $|\mathbf{v}\rangle$ je vlastní vektor operátoru $\hat{\mathbf{N}}$:

$$\hat{\mathbf{N}}|\mathbf{v}\rangle = \nu|\mathbf{v}\rangle \ , \tag{6.247}$$

kde ν je vlastní hodnota operátoru $\hat{\mathbf{N}}$, příslušející vlastnímu vektoru $|\mathbf{v}\rangle$.
Operátor $\hat{\mathbf{N}}$ je operátor pozorovatelné, a proto platí podmínka

$$\langle\mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle > 0. \tag{6.248}$$

Z (6.244) pak vyplývá, že

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{a}}^-|\mathbf{v}\rangle &= \hat{\mathbf{a}}^-\left(\hat{\mathbf{N}} - 1\right)|\mathbf{v}\rangle = (\nu - 1)\hat{\mathbf{a}}^-|\mathbf{v}\rangle, \\ \hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{a}}^+|\mathbf{v}\rangle &= \hat{\mathbf{a}}^+\left(\hat{\mathbf{N}} + 1\right)|\mathbf{v}\rangle = (\nu + 1)\hat{\mathbf{a}}^+|\mathbf{v}\rangle. \end{aligned} \tag{6.249}$$

Z (6.249) plyne, že ketvektor $\hat{\mathbf{a}}^{-}\left|\mathbf{v}\right\rangle$, vzniklý aplikací anihilačního operátoru na ketvektor $\left|\mathbf{v}\right\rangle$, je rovněž vlastním vektorem operátoru $\hat{\mathbf{N}}$, jemuž přísluší vlastní hodnota ($\nu - 1$).
Podobně je ketvektor $\hat{\mathbf{a}}^{+}\left|\mathbf{v}\right\rangle$ vlastním vektorem operátoru $\hat{\mathbf{N}}$ s vlastní hodnotou ($\nu + 1$).
Vytvořme posloupnost vektorů $\hat{\mathbf{a}}^{-}\left|\mathbf{v}\right\rangle ; \left(\hat{\mathbf{a}}^{-}\right)^{2}\left|\mathbf{v}\right\rangle ; \ldots ; \left(\hat{\mathbf{a}}^{-}\right)^{p}\left|\mathbf{v}\right\rangle$.
Tyto vektory jsou vlastními vektory operátoru $\hat{\mathbf{N}}$.
Příslušejí jim vlastní hodnoty ($\nu - 1$), ($\nu - 2$), … , ($\nu - p$).
Důkaz:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{N}}\left(\hat{\mathbf{a}}^{-}\right)^{2}\left|\mathbf{v}\right\rangle &= \hat{\mathbf{a}}^{+}\hat{\mathbf{a}}^{-}\hat{\mathbf{a}}^{-}\hat{\mathbf{a}}^{-}\left|\mathbf{v}\right\rangle = \left(\hat{\mathbf{a}}^{-}\hat{\mathbf{a}}^{+} - 1\right)\hat{\mathbf{a}}^{-}\hat{\mathbf{a}}^{-}\left|\mathbf{v}\right\rangle = \\ &= \hat{\mathbf{a}}^{-}\hat{\mathbf{a}}^{+}\hat{\mathbf{a}}^{-}\hat{\mathbf{a}}^{-}\left|\mathbf{v}\right\rangle - \hat{\mathbf{a}}^{-}\hat{\mathbf{a}}^{-}\left|\mathbf{v}\right\rangle = \left(\hat{\mathbf{a}}^{-}\hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{a}}^{-} - \hat{\mathbf{a}}^{-}\hat{\mathbf{a}}^{-}\right)\left|\mathbf{v}\right\rangle = \\ &= \left(\hat{\mathbf{a}}^{-}(\nu - 1)\hat{\mathbf{a}}^{-} - \hat{\mathbf{a}}^{-}\hat{\mathbf{a}}^{-}\right)\left|\mathbf{v}\right\rangle = \left(\hat{\mathbf{a}}^{-}\hat{\mathbf{a}}^{-}(\nu - 1) - \hat{\mathbf{a}}^{-}\hat{\mathbf{a}}^{-}\right)\left|\mathbf{v}\right\rangle = \\ &= (\nu - 2)\left(\mathbf{a}^{-}\right)^{2}\left|\mathbf{v}\right\rangle .\end{aligned} \qquad (6.250)$$

Podobně bychom dokázali, že vektor $\left(\hat{\mathbf{a}}^{-}\right)^{p}\left|\mathbf{v}\right\rangle$ je vlastním vektorem operátoru $\hat{\mathbf{N}}$ s vlastní hodnotou ($\nu - p$).
Vytvořme posloupnost vektorů $\hat{\mathbf{a}}^{+}\left|\mathbf{v}\right\rangle ; \left(\hat{\mathbf{a}}^{+}\right)^{2}\left|\mathbf{v}\right\rangle ; \ldots ; \left(\hat{\mathbf{a}}^{+}\right)^{p}\left|\mathbf{v}\right\rangle$.
Ekvivalentním způsobem jako v předešlém případě lze ukázat, že tyto vektory jsou rovněž vlastními vektory operátoru $\hat{\mathbf{N}}$ a že jim příslušejí vlastní hodnoty ($\nu + 1$), ($\nu + 2$), … , ($\nu + p$).
Posloupnost vektorů $\left(\hat{\mathbf{a}}^{-}\right)^{p}$ je omezená, neboť vlastní hodnota pozorovatelného operátoru $\hat{\mathbf{N}}$ nemůže být záporná.
Krajní případ nastane tehdy, když

$$\nu = p . \qquad (6.251)$$

Přitom je vlastní hodnota ($\nu - p$) nulová.

Nulovou vlastní hodnotu dostaneme tedy pro různé hodnoty ν podle velikosti p.
Této nulové vlastní hodnotě může příslušet více vlastních ketvektorů. Označme je symbolem $|\mathbf{\nu p}\rangle$.
Nulové vlastní hodnotě tedy příslušejí ketvektory

$$|\mathbf{11}\rangle\,;|\mathbf{22}\rangle\,;|\mathbf{33}\rangle\,;\ldots;|\mathbf{pp}\rangle. \qquad (\ 6.252\ )$$

Z toho plyne, že nulová vlastní hodnota je p-krát degenerována.
Vytvořme lineární kombinaci těchto vektorů a výsledný vektor označme $|\mathbf{0}\rangle$.
Pak

$$|\mathbf{0}\rangle = c_1^{(o)}|\mathbf{11}\rangle + c_2^{(o)}|\mathbf{22}\rangle + c_3^{(o)}|\mathbf{33}\rangle + \ldots + c_p^{(o)}|\mathbf{pp}\rangle. \qquad (\ 6.253\ )$$

Zvolme nyní obecné vlastní číslo n o němž platí

$$n = \nu - o\,, \qquad (\ 6.254\ )$$

přičemž

$$\hat{\mathbf{N}}\left(\hat{\mathbf{a}}^-\right)^{(o)}|\mathbf{v}\rangle = (\nu - o)\left(\hat{\mathbf{a}}^-\right)^{(o)}|\mathbf{v}\rangle = n\left(\hat{\mathbf{a}}^-\right)^{(o)}|\mathbf{v}\rangle\ . \qquad (\ 6.255\ )$$

Vytvořme, podobně jako u nulové vlastní hodnoty, lineární kombinaci vektorů s vlastní hodnotou n a touto lineární kombinací definujme ketvektor $|\mathbf{n}\rangle$:

$$|\mathbf{n}\rangle = \sum_{\nu} c_{\nu}^{(n)}|\mathbf{\nu o}\rangle, \qquad (\ 6.256\ )$$

kde dílčí vektor $|\mathbf{\nu o}\rangle$ je jakýkoli ketvektor s takovými čísly ν a o, pro něž je splněna rovnost (6.254).
Tímto způsobem lze sestrojit posloupnost vektorů

$$|\mathbf{0}\rangle\,,|\mathbf{1}\rangle\,,|\mathbf{2}\rangle\,,|\mathbf{3}\rangle\,,\ldots,|\mathbf{n}\rangle\,,\ldots \qquad (\ 6.257\ )$$

jež mohou tvořit bázi pro reprezentaci $\{\hat{\mathbf{N}}\}$.
Součinitele $c_{\nu}^{(o)}$ můžeme zvolit tak, aby vlastní vektory (6.254) byly ortonormální.
Operátory $\hat{\mathbf{a}}^{+}$ a $\hat{\mathbf{a}}^{-}$, a z nich odvozený operátor $\hat{\mathbf{N}}$ nazýváme **Boseho operátory**, neboť s jejich pomocí popisujeme vlastnosti částic s **Boseho – Einsteinovou statistikou**.
Odvodili jsme, že

$$\hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{a}}^{-}|\mathbf{v}\rangle=(\nu-1)\hat{\mathbf{a}}^{-}|\mathbf{v}\rangle. \qquad (\ 6.258\ )$$

Z definice operátoru $\hat{\mathbf{N}}$ navíc vyplývá:

$$\hat{\mathbf{N}}|\mathbf{v}-\mathbf{1}\rangle=(\nu-1)|\mathbf{v}-\mathbf{1}\rangle. \qquad (\ 6.259\ )$$

Srovnáme-i operátorové rovnice (6.258), (6.259), zjistíme, že

$$\hat{\mathbf{a}}^{-}|\mathbf{v}\rangle=c_1|\mathbf{v}-\mathbf{1}\rangle, \qquad (\ 6.260\ )$$

kde c_1 je konstanta.
Této rovnici přísluší duální rovnice

$$\langle\mathbf{v}|\hat{\mathbf{a}}^{+}=c_1^{*}\langle\mathbf{v}-\mathbf{1}|\ . \qquad (\ 6.261\ )$$

Vynásobíme-li rovnici (6.260) zleva rovnicí (6.261), dostaneme

$$\langle\mathbf{v}|\hat{\mathbf{a}}^{+}\hat{\mathbf{a}}^{-}|\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{v}|\hat{\mathbf{N}}|\mathbf{v}\rangle=c_1^{2}\langle\mathbf{v}-\mathbf{1}|\mathbf{v}-\mathbf{1}\rangle=c_1^{2}, \qquad (\ 6.262\ )$$

neboť vektory $|\mathbf{v}\rangle$ jsou ortonormální.
Navíc

$$\langle\mathbf{v}|\hat{\mathbf{N}}|\mathbf{v}\rangle=\nu\langle\mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle=\nu\,. \qquad (\ 6.263\ )$$

Proto srovnáním s (6.262) vychází

$$c_1 = \sqrt{\nu}\,. \tag{6.264}$$

Podobně máme

$$\hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{a}}^{+}\left|\mathbf{v}\right\rangle = \left(\nu+1\right)\hat{\mathbf{a}}^{+}\left|\mathbf{v}\right\rangle, \tag{6.265}$$

$$\hat{\mathbf{N}}\left|\mathbf{v}+\mathbf{1}\right\rangle = \left(\nu+1\right)\left|\mathbf{v}+\mathbf{1}\right\rangle. \tag{6.266}$$

a tedy

$$\hat{\mathbf{a}}^{+}\left|\mathbf{v}\right\rangle = c_2\left|\mathbf{v}+\mathbf{1}\right\rangle, \tag{6.267}$$

$$\left\langle\mathbf{v}\right|\hat{\mathbf{a}}^{-} = c_2^{*}\left\langle\mathbf{v}+\mathbf{1}\right| \,. \tag{6.268}$$

Odsud vynásobením obou rovnic zleva

$$\left\langle\mathbf{v}\right|\hat{\mathbf{a}}^{-}\hat{\mathbf{a}}^{+}\left|\mathbf{v}\right\rangle = c_2^2\left\langle\mathbf{v}-\mathbf{1}\middle|\mathbf{v}-\mathbf{1}\right\rangle = c_2^2 \,. \tag{6.269}$$

Protože

$$\hat{\mathbf{a}}^{-}\hat{\mathbf{a}}^{+} = \hat{\mathbf{N}}+1, \tag{6.270}$$

bude

$$\left\langle\mathbf{v}\right|\hat{\mathbf{a}}^{+}\hat{\mathbf{a}}^{-}\left|\mathbf{v}\right\rangle = \left\langle\mathbf{v}\middle|\hat{\mathbf{N}}+1\middle|\mathbf{v}\right\rangle = \left\langle\mathbf{v}\middle|\hat{\mathbf{N}}\middle|\mathbf{v}\right\rangle+1 = \nu\left\langle\mathbf{v}\middle|\mathbf{v}\right\rangle+1 = \nu+1. \tag{6.271}$$

Z toho po srovnání s (6.269)

$$c_2 = \sqrt{\nu+1}\,. \tag{6.272}$$

Odtud nám vycházejí operátorové rovnice

$$\hat{\mathbf{a}}^{+}\left|\mathbf{n}\right\rangle=\left(n+1\right)^{\frac{1}{2}}\left|\mathbf{n}+\mathbf{1}\right\rangle,$$
$$\hat{\mathbf{a}}^{-}\left|\mathbf{n}\right\rangle=n^{\frac{1}{2}}\left|\mathbf{n}-\mathbf{1}\right\rangle. \qquad (6.273)$$

Z nich lze odvodit rekurentní vztah

$$\left|\mathbf{n}\right\rangle=\frac{\left(\hat{\mathbf{a}}^{+}\right)^{n}}{\sqrt{n!}}\left|\mathbf{0}\right\rangle . \qquad (6.274)$$

O maticových členech operátoru $\hat{\mathbf{N}}$ platí:

$$N_{n',n}=\left\langle\mathbf{n}'\right|\hat{\mathbf{N}}\left|\mathbf{n}\right\rangle=n\left\langle\mathbf{n}'\middle|\mathbf{n}\right\rangle=n\delta_{n',n}\ , \qquad (6.275)$$

kde $\delta_{n',n}$ je Kroneckerova delta.
Operátor počtu částic je tedy reprezentován diagonální maticí

$$\hat{\mathbf{N}}=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots\\0&1&0&\cdots\\0&0&2&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}. \qquad (6.276)$$

Maticový člen operátoru $\hat{\mathbf{a}}^{-}$ označme $a_{n',n}$.
Přitom

$$a^{-}_{n',n}=\left\langle\mathbf{n}'\right|\hat{\mathbf{a}}^{-}\left|\mathbf{n}\right\rangle=n^{\frac{1}{2}}\left\langle\mathbf{n}'\middle|\mathbf{n}\right\rangle=n^{\frac{1}{2}}\delta_{n',n+1} \qquad (6.277)$$

z čehož

$$n'=n+1. \qquad (6.278)$$

Pak

$$\hat{\mathbf{a}}^- = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \qquad (6.279)$$

Podobně platí o maticových členech operátoru $\hat{\mathbf{a}}^+$:

$$a^+_{n',n} = \langle \mathbf{n}' | \hat{\mathbf{a}}^+ | \mathbf{n} \rangle = (n+1)^{\frac{1}{2}} \langle \mathbf{n}' | \mathbf{n}+\mathbf{1} \rangle = (n+1)^{\frac{1}{2}} \delta_{n',n+1} \,, \qquad (6.280)$$
$$n' = n+1 .$$

V maticovém vyjádření

$$\hat{\mathbf{a}}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \qquad (6.281)$$

Odtud pro původní operátory vychází

$$\aleph = \hat{\mathbf{N}} + \frac{1}{2} \,, \qquad (6.282)$$

$$\hat{\mathbf{h}} = \hbar\omega\aleph = \left(\hat{\mathbf{N}} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \qquad (6.283)$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = \sqrt{2}\left(\hat{\mathbf{a}}^- + \hat{\mathbf{a}}^+\right), \qquad (6.284)$$
$$\hat{\mathbf{P}} = i\sqrt{2}\left(\hat{\mathbf{a}}^+ - \hat{\mathbf{a}}^-\right), \qquad (6.285)$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \sqrt{2}\left(\frac{\hbar}{\varpi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\mathbf{a}}^- + \hat{\mathbf{a}}^+\right), \qquad (6.286)$$

$$\hat{\mathbf{p}} = i(\hbar\omega)^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\mathbf{a}}^{+} - \hat{\mathbf{a}}^{-}\right). \tag{6.287}$$

Odvodíme maticové členy těchto operátorů v reprezentaci $\{\hat{\mathbf{N}}\}$:

$$\langle \mathbf{n}' | \hat{\mathbf{h}} | \mathbf{n} \rangle = \hbar\omega \langle \mathbf{n}' | \hat{\mathbf{N}} + \tfrac{1}{2} | \mathbf{n} \rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\delta_{n',n} \,,$$

$$\hat{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\hbar\omega & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{3}{2}\hbar\omega & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{5}{2}\hbar\omega & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{6.288}$$

$$\langle \mathbf{n}' | \hat{\mathbf{q}} | \mathbf{n} \rangle = \left(\frac{2\hbar}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\langle \mathbf{n}' | \hat{\mathbf{a}}^{-} | \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{n}' | \hat{\mathbf{a}}^{+} | \mathbf{n} \rangle \right) =$$

$$= \left(\frac{2\hbar}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \left(n^{\frac{1}{2}} \delta_{n',n+1} + (n+1)^{\frac{1}{2}} \delta_{n',n+1} \right),$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \left(\frac{2\hbar}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{6.289}$$

$$\langle \mathbf{n}' | \hat{\mathbf{p}} | \mathbf{n} \rangle = i(2\hbar\omega)^{\frac{1}{2}} \left(\langle \mathbf{n}' | \hat{\mathbf{a}}^{+} | \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{n}' | \hat{\mathbf{a}}^{-} | \mathbf{n} \rangle \right) =$$

$$= i(2\hbar\omega)^{\frac{1}{2}} \left[(n+1)^{\frac{1}{2}} \delta_{n',n+1} - n^{\frac{1}{2}} \delta_{n',n+1} \right],$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \left(\frac{2\hbar}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \qquad (\ 6.290\ )$$

Maticemi (6.288), (6.289), (6.290), jsou popsány maticové reprezentace operátoru počtu částic $\hat{\mathbf{N}}$, anihilačního operátoru $\hat{\mathbf{a}}^{-}$, kreačního operátoru $\hat{\mathbf{a}}^{+}$, hamiltoniánu $\hat{\mathbf{h}}$, operátoru zobecněné souřadnice $\hat{\mathbf{q}}$, a zobecněného impulsu $\hat{\mathbf{p}}$.

Operátor $\hat{\mathbf{N}}$ jsme nazvali operátorem počtu částic.
V našem případě jde o hypotetickou částici, která se nazývá foton.
Odvodili jsme operátorovou rovnici

$$\hat{\mathbf{h}}_m |\mathbf{v}\rangle = \hbar\omega_m \left(N + \frac{1}{2} \right) |\mathbf{v}\rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_m |\mathbf{v}\rangle, \qquad (\ 6.291\ )$$

kde $\mathbf{h}_m$ je Hamiltonův operátor, který se vztahuje k elektromagnetickému poli vidu m.
Veličina $\hbar\omega_m$ určuje kvantum elektromagnetické energie, přičemž $\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_m$ je vlastní číslo Hamiltonova operátoru, a tedy celková energie elektromagnetického pole vidu m.
Protože $\hbar\omega_m$ je energie jednoho fotonu, bude číslo $\left(n+\frac{1}{2}\right)$ udávat celkový počet fotonů elektromagnetického pole vidu m.
Stav určený ketvektorem

$$|\mathbf{v}\rangle \equiv |\mathbf{0}\rangle, \qquad (\ 6.292\ )$$

přísluší stavu vakua bez elektromagnetického pole.

Je nutno připomenout, že foton je částice podléhající Boseho – Einsteinově statistice a jeho rychlost je rychlostí šíření elektromagnetických vln, z čehož plyne, že jeho klidová hmotnost je nulová.
Z rovnice (6.260) a rovnosti (6.264) dále plyne, že operátor $\hat{\mathbf{a}}^-$ převádí kvantovou soustavu elektromagnetického pole ze stavu $|\mathbf{v}\rangle$ do stavu $|\mathbf{v}-\mathbf{1}\rangle$ a tedy snižuje počet fotonů o jeden.
Proto se nazývá anihilačním operátorem
Operátor $\hat{\mathbf{a}}^-$ naopak zvyšuje počet fotonů o jeden, a proto se nazývá kreačním operátorem.
Popíšeme-li elektromagnetické pole souborem oscilátorů s obsazenými N_i , pak pro jeho energii dostaneme

$$E = \sum_i \hbar\omega_i \left(N_i + \frac{1}{2} \right). \qquad (6.293)$$

Je zřejmé, že při všech $N_i = 0$ bude mít vakuum našeho pole energii

$$E^0 = \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{2} \to \infty . \qquad (6.294)$$

Existence této energie je čistě kvantový jev a je důsledkem netriviální nekomutativnosti operátorů.
Rozebereme jen případ operátorů zobecněné souřadnice $\hat{\mathbf{q}}$ a impulsu $\hat{\mathbf{p}}$

$$[\hat{\mathbf{p}}\,;\hat{\mathbf{q}}] = i\hbar . \qquad (6.295)$$

Platí, že

$$\begin{aligned} \langle\hat{\mathbf{p}}\rangle &= \langle\mathbf{0}|\hat{\mathbf{p}}|\mathbf{0}\rangle = 0 , \\ \langle\hat{\mathbf{q}}\rangle &= \langle\mathbf{0}|\hat{\mathbf{q}}|\mathbf{0}\rangle = 0 . \end{aligned} \qquad (6.296)$$

Střední hodnoty $\hat{\mathbf{p}}$ i $\hat{\mathbf{q}}$ jsou tedy nulové.
Střední kvadratické odchylky

$$\Delta q = \left[\left\langle \hat{\mathbf{q}}^2 \right\rangle - \left\langle \hat{\mathbf{q}} \right\rangle^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\hbar}{2\omega}\right]^{\frac{1}{2}},$$
$$\Delta p = \left[\left\langle \hat{\mathbf{p}}^2 \right\rangle - \left\langle \hat{\mathbf{p}} \right\rangle^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\hbar\omega}{2}\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (6.297)$$

a tedy

$$\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2}. \qquad (6.298)$$

Střední hodnota kinetické energie vychází

$$\left\langle E \right\rangle = \frac{1}{2m}\left\langle \mathbf{0} \middle| \hat{\mathbf{p}} \middle| \mathbf{0} \right\rangle = \frac{\hbar\omega}{4m} . \qquad (6.299)$$

i když se tedy $\left\langle \hat{\mathbf{p}} \right\rangle$ a $\left\langle \hat{\mathbf{q}} \right\rangle$ rovnaly nule, jsou fluktuace vakua $\left\langle \hat{\mathbf{p}}^2 \right\rangle$ a $\left\langle \hat{\mathbf{q}}^2 \right\rangle$ od nuly různé. Vakuum není v klidu a fluktuace nulové kinetické energie, úměrné $(\Delta p)^2$, jsou řádu $\hbar\omega/2$ pro každý mód elektromagnetického pole.

Je zřejmé, že kdyby náš harmonický oscilátor byl tvořen oscilačním obvodem s kapacitou *C*, indukčností *L* a frekvencí $\omega = \sqrt{LC}$, pak bychom mohli za souřadnici *q* považovat náboj *e* a za impuls *p* proud $\dfrac{de}{dt}$.

Ihned je jasné, že ani náboj, ani proud nebudou mít nulové své fluktuace (obvod bude konat nenulovou práci), ačkoliv jejich střední hodnoty nulové budou.

Také nemůžeme znát současně jejich hodnoty s přesností lepší, než dovolují relace neurčitosti, což je velice důležité při kvantování náboje a proudu, např. v supravodivém Josephsonově přechodu.

I v klasické fyzice existují tzv. tepelné fluktuace, jejichž střední energie je $k_B T$.

Při absolutní termodynamické nule by však tyto fluktuace vymizely.

Brian David Josephson (1940)

Kvantová mechanika je však charakterizována právě tím, že fluktuace budou v soustavě existovat i při termodynamické nule – i ve vakuu za nepřítomnosti reálných částic.
I když se reálné fotony ve vakuu nevyskytují, ukázali jsme si, že existují nenulové elektromagnetické fluktuace vakua.
Jakési fotony zde tedy být musí.
Těmto fotonům, které existují jen po jistou dobu $\Delta t \approx \frac{\hbar}{\Delta E}$, a které nám kvantují elektromagnetické fluktuace vakua, říkáme **virtuální fotony**.
Jejich časová existence je na rozdíl od reálných fotonů, při jejichž interakci se energie zachovává, omezena relací neurčitosti.
O tomto vakuu hovoříme jako o **vakuu poruchovém**, protože tyto virtuální fotony vznikají ve vyšších řádech poruchové teorie.
Toto vakuum tedy může obsahovat libovolný počet virtuálních fotonů.
Elektromagnetické vakuum je tedy plné virtuálních fotonů, s nimiž mohou částice interagovat.
Elektron může např. emitovat virtuální foton a opět jej v čase Δt absorbovat.
Díky těmto virtuálním procesům může elektron změnit hmotnost (tzv. **idea renormalizovatelnosti hmotnosti**).
Prostřednictvím této interakce s vakuem jsou reálné částice oblečeny do oblaku virtuálních fotonů.
Při $\{\hat{\mathbf{Q}}\}$ reprezentaci vezmeme za základ vektorové soustavy vlastní vektory operátoru $\hat{\mathbf{Q}}$, který přísluší zobecněné souřadnici.
Pro operátor $\hat{\mathbf{Q}}$ platí operátorová rovnice

$$\hat{\mathbf{Q}}|\mathbf{q}\rangle = q|\mathbf{q}\rangle, \qquad (6.300)$$

kde $|\mathbf{q}\rangle$ je vlastní vektor operátoru $\hat{\mathbf{Q}}$, q jeho vlastní hodnota, tj. zobecněná souřadnice.
Ta, jak známo z kvantové mehaniky, tvoří pro neomezený prostor spojité spektrum.
O vektorové soustavě $|\mathbf{q}\rangle$ přitom platí podmínka

$$\int |\mathbf{q}\rangle\, dq\, \langle\mathbf{q}| = 1 \qquad (6.301)$$

a podmínka ortogonalita

$$\langle\mathbf{q}|\mathbf{q}'\rangle = \delta(q-q'), \qquad (6.302)$$

kde $\delta(q-q')$ je Diracova funkce.
V $\{\hat{\mathbf{Q}}\}$ reprezentaci bude operátor $\hat{\mathbf{Q}}$ reprezentován spojitou maticí o prvcích

$$\langle\mathbf{q}|\hat{\mathbf{Q}}|\mathbf{q}'\rangle = \langle\mathbf{q}|\hat{\mathbf{q}}|\mathbf{q}'\rangle = q\langle\mathbf{q}|\mathbf{q}'\rangle = q\delta(q-q'), \qquad (6.303)$$

a operátor $\hat{\mathbf{P}}$ maticí

$$\langle\mathbf{q}|\hat{\mathbf{P}}|\mathbf{q}'\rangle = -i\frac{\partial}{\partial q}\langle\mathbf{q}|\mathbf{q}'\rangle = -i\frac{\partial}{\partial q}\delta(q-q'), \qquad (6.304)$$

tj. diagonální spojitou maticí o prvcích $-i\dfrac{\partial}{\partial q}$.
O Hamiltonově operátoru vidu *m* platí

$$\aleph_m = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{P}}_m^2 + \hat{\mathbf{Q}}_m^2\right), \qquad (6.305)$$

O maticových členech operátoru $\aleph_m$ platí v $\{\hat{\mathbf{Q}}\}$ reprezentaci:

$$\langle \mathbf{q} | \aleph_m | \mathbf{q}' \rangle = \frac{1}{2}\left(q_m^2 - \frac{d^2}{dq_m^2} \right) \langle \mathbf{q} | \mathbf{q}' \rangle = \frac{1}{2}\left(q_m^2 - \frac{d^2}{dq_m^2} \right) \delta(q - q'), \quad (\ 6.306\ )$$

neboť

$$\aleph_m = \frac{1}{2}\left(q_m^2 - \frac{d^2}{dq_m^2} \right) \quad (\ 6.307\ )$$

Určíme nyní složky vektoru $\aleph_m |\boldsymbol{\psi}\rangle$ v $\{\hat{\mathbf{Q}}\}$ reprezentaci.
O těchto složkách obecně platí (srov. (6.301), (6.302)):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q} | \aleph_m | \boldsymbol{\psi} \rangle &= \int_{q'} \langle \mathbf{q} | \aleph_m | \mathbf{q}' \rangle \, dq' \langle \mathbf{q}' | \boldsymbol{\psi} \rangle = \\ &= \int_{q'} \aleph_m \psi(q') \delta(q - q') \, dq' = \aleph_m \psi(q) . \end{aligned} \quad (\ 6.308\ )$$

Přitom funkci $\psi(q)$, o níž platí

$$\psi(q) = \langle \mathbf{q} | \boldsymbol{\psi} \rangle \quad (\ 6.309\ )$$

nazýváme vlnovou funkcí.
Vztahy (6.303), (6.304), (6.306) nám určují maticové členy operátorů $\hat{\mathbf{Q}}$, $\hat{\mathbf{P}}$, $\aleph_m$ v $\{\hat{\mathbf{Q}}\}$ reprezentaci.
Maticové členy příslušejí spojitým maticím.
Vztahem (6.308) je definována vlnová funkce.
Při odvozování maticových členů uvedených operátorů jsme předpokládali spojité spektrum vlastních čísel operátoru zobecněné souřadnice.
Z (6.245) a (6.247) lze snadno odvodit operátorovou rovnici pro Hamiltonův operátor elektromagnetického pole vidu *m* ve tvaru:

$$\aleph_m |\boldsymbol{\psi}_n\rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega |\boldsymbol{\psi}_n\rangle \equiv \varepsilon_n |\boldsymbol{\psi}_n\rangle, \quad (\ 6.310\ )$$

kde $\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega$ a kde jsme označili ketvektory $\left|\mathbf{v}\right\rangle$ symbolem $\left|\boldsymbol{\psi}_n\right\rangle$.
Levou i pravou stranu rovnice (6.310) vyjádříme v { $\hat{\mathbf{Q}}$ } reprezentaci:

$$\left\langle \mathbf{q} \right| \aleph_m \left| \boldsymbol{\psi}_n \right\rangle = \varepsilon_n \left\langle \mathbf{q} | \boldsymbol{\psi}_n \right\rangle \ . \qquad (6.311)$$

Uvážíme-li (6.308), dostaneme

$$\aleph_m \psi_n(q) = \varepsilon_n \psi_n(q) \ , \qquad (6.312)$$

Vztahem (6.312) je určena Schrödingerova rovnice popisující kvantové vlastnosti soustavy elektromagnetického pole vidu m, přičemž ε_n je vlastní energie kvantové podsoustavy elektromagnetického pole.
Dosadíme-li v (6.312) za $\aleph_m$ příslušný výraz (6.306), dostaneme Hermitovu diferenciální rovnici

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dq^2} + q^2 \right) \psi_n(q) = \varepsilon_n \psi_n(q), \qquad (6.313)$$

jejíž řešením určíme vlnovou funkci $\psi_n(q)$.
Vlnovou funkci $\psi_n(q)$ je však možno určit také tak, že nejprve určíme funkci $\psi_0(q)$, příslušející stavu $\left|\mathbf{0}\right\rangle$ a z ní použitím rekurentních vztahů (6.274) odvodíme obecnou vlnovou funkci $\psi_n(q)$.
Pro n = 0, tedy pro $\left|\mathbf{0}\right\rangle$ ketvektor platí

$$\psi_0(q) = \left\langle \boldsymbol{\psi} | \mathbf{0} \right\rangle . \qquad (6.314)$$

Při { $\hat{\mathbf{Q}}$ } reprezentaci, s uvážením (6.273),

$$\left\langle \mathbf{q} \right| \hat{\mathbf{a}}^- \left| \mathbf{0} \right\rangle = a^- \left\langle \mathbf{q} | \mathbf{0} \right\rangle = a^- \psi_0(q) = 0, \qquad (6.315)$$

Po dosazení za operátor $\hat{\mathbf{a}}^-$, s uvážením (6.300)

$$\hat{\mathbf{a}}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\mathbf{Q}} + i\hat{\mathbf{P}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q + \frac{d}{dq}\right), \qquad (6.316)$$

a tedy

$$\left(q + \frac{d}{dq}\right)\psi_0(q) = 0. \qquad (6.317)$$

To je diferenciální rovnice pro $\psi_0(q)$.
Jejím řešením je funkce

$$\psi_0 = C \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}q^2\right). \qquad (6.318)$$

Integrační konstantu určíme z podmínky normování

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^2(q)\, dq = C^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-q^2\right) dq = C^2 \pi^{\frac{1}{2}} = 1, \qquad (6.319)$$

odkud

$$C = \pi^{-\frac{1}{4}} \qquad (6.320)$$

a

$$\psi_0 = \pi^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2}q^2\right). \qquad (6.321)$$

Známe-li funkci ψ_0, určíme ψ_n z rekurentního vztahu (6.274).
V { $\hat{\mathbf{Q}}$ } reprezentaci

$$\langle \mathbf{q} | \mathbf{n} \rangle = \psi_n = (n!)^{-\frac{1}{2}} \left(\hat{\mathbf{a}}^+\right)^n |\mathbf{n}\rangle. \qquad (6.322)$$

přičemž

$$\hat{\mathbf{a}}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\mathbf{Q}} - i\hat{\mathbf{P}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q - \frac{d}{dq}\right). \qquad (6.323)$$

Pak

$$\psi_n(q) = (n!)^{-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{n}{2}} \pi^{-\frac{1}{4}} \left(q - \frac{d}{dq}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}q^2\right), \qquad (6.324)$$

neboli

$$\psi_n(q) = (n!)^{-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{n}{2}} \pi^{-\frac{1}{4}} \left[(-1)^n \exp\left(\frac{1}{2}q^2\right)\frac{d^n}{dq^n}\exp\left(-\frac{1}{2}q^2\right)\right]\exp\left(-\frac{1}{2}q^2\right). \qquad (6.325)$$

Hermitovy polynomy jsou definovány vztahem

$$H_n(z) = (-1)^n \exp\left(z^2\right)\frac{d^n}{dz^n}\exp\left(-z^2\right). \qquad (6.326)$$

Srovnáme-li (6.326) s (6.325), zjistíme, že

$$\psi_n(q) = \left(\sqrt{\pi}\cdot 2^n \cdot n!\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}q^2\right) H_n\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right). \qquad (6.327)$$

Vztahem (6.327) je určena vlnová funkce kvantové soustavy elektromagnetického pole jednoho vidu.
Přísluší-li vidu m ketvektor stavu $|\mathbf{n}_m\rangle$, pak mnohovidové soustavě, vzniklé superpozicí jednotlivých vidů, přísluší ketvektor stavu $|\mathbf{n}\rangle$, který dostaneme tenzorovým součinem základních ketvektorů

$$|\mathbf{n}\rangle = |\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots \mathbf{n}_m, \ldots\rangle = |\mathbf{n}_1\rangle|\mathbf{n}_2\rangle\ldots|\mathbf{n}_m\rangle\ldots \qquad (6.328)$$

Pak

$$\aleph|\mathbf{n}\rangle = \sum_m \aleph_m |\mathbf{n}_1\rangle|\mathbf{n}_2\rangle\ldots|\mathbf{n}_m\rangle\ldots =$$
$$= \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)|\mathbf{n}\rangle + \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)|\mathbf{n}\rangle + \cdots + \left(n_m + \frac{1}{2}\right)|\mathbf{n}\rangle + \cdots =$$
$$= \left(n_1 + n_2 + \cdots + n_p + \frac{1}{2}p\right), \qquad (6.329)$$

je-li celkový počet vidů elektromagnetického pole p.
Označme

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p . \qquad (6.330)$$

Z (6.330) je patrno, že jistému vlastnímu číslu n Hamiltonova operátoru $\aleph$ přísluší více ketvektorů $|\mathbf{n}\rangle$, neboť číslo n dostaneme různou kombinací čísel n_1, n_2, … .
Jde tedy o degenerovanou kvantovou soustavu.
Lze dokázat, že stupeň degenerace této soustavy je

$$d = \frac{(n + p + 1)!}{n!(p-1)!} . \qquad (6.331)$$

Pro základní ketvektor platí:

$$|\mathbf{0}\rangle = |\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots\rangle . \qquad (6.332)$$

Dokázali jsme, že

$$\hat{\mathbf{a}}_1^- |\mathbf{0}\rangle = 0 ; \quad \hat{\mathbf{a}}_2^- |\mathbf{0}\rangle = 0 ; \ldots ; \hat{\mathbf{a}}_p^- |\mathbf{0}\rangle = 0 . \qquad (6.333)$$

Proto platí obecný rekurentní vztah

$$|\mathbf{n}\rangle = |\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots \mathbf{n}_p\rangle = (n_1!n_2!\ldots!n_p!)^{-\frac{1}{2}} \left[\left(\hat{\mathbf{a}}_1^+\right)^{n_1} \ldots \left(\hat{\mathbf{a}}_1^+\right)^{n_p}\right]|\mathbf{0}\rangle . \qquad (6.334)$$

Ze vztahu (6.329) vyplývá, že

$$\hat{\mathbf{N}} = \sum_p \hat{\mathbf{N}}_p \,, \qquad (6.335)$$

$$\aleph = \left(\hat{\mathbf{N}} + \frac{p}{2} \right) , \qquad (6.336)$$

kde $\hat{\mathbf{N}}$ je operátor počtu fotonů vícevidové kvantové soustavy elektromagnetického pole, $\hat{\mathbf{N}}_p$ operátor počtu fotonů kvantové soustavy elektromagnetického pole vidu p.
Nahradíme-li operátor zobecněného impulsu $\hat{\mathbf{p}}_\nu$ elektromagnetického pole vodu ν příslušným kreačním a anihilačním operátorem, vycházejíc ze vztahů (6.235), (6.236), (6.241), dostaneme pro operátor intenzity elektrického pole vidu ν (konstantu μ jsme zahrnuli do $\mathbf{T}_\nu(\mathbf{r})$):

$$\hat{\mathbf{E}}_\nu = i\left(\frac{1}{2}\hbar\omega_\nu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{\mathbf{a}}_\nu^- \mathbf{T}_\nu(\mathbf{r}) - \hat{\mathbf{a}}_\nu^+ \mathbf{T}_\nu^*(\mathbf{r}) \right). \qquad (6.337)$$

Přitom $\hat{\mathbf{E}}_\nu$ je operátor intenzity elektrického pole záření vidu ν ve Schrödingerově reprezentaci.
Z (6.337) vyplívá, že vlastní vektorové stavy operátoru intenzity elektrického pole záření budou totožné s vlastními vektorovými stavy anihilačního a kreačního operátoru.
V Heisenbergově reprezentaci bude mít operátor $\hat{\mathbf{E}}_\nu$ tvar

$$\hat{\mathbf{E}}_\nu = i\left(\frac{1}{2}\hbar\omega_\nu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{\mathbf{a}}_\nu^-(t)\mathbf{T}_\nu(\mathbf{r})e^{-i\omega_\nu t} - \hat{\mathbf{a}}_\nu^+(t)\mathbf{T}_\nu^*(\mathbf{r})e^{i\omega_\nu t} \right). \qquad (6.338)$$

V případě rovinné elektromagnetické vlny bude

$$\mathbf{T}_\nu = \mu e^{i(\mathbf{k},\mathbf{r})}, \qquad (6.339)$$

kde **k** je vlnový vektor.

Pak po dosazení do (6.338) máme

$$\hat{\mathbf{E}}_\nu = i\mu\left(\frac{1}{2}\hbar\omega_\nu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\mathbf{a}}_\nu^-(t)\mathbf{T}_\nu(\mathbf{r})e^{i(\mathbf{k},\mathbf{r})}e^{-i\omega_\nu t} - \hat{\mathbf{a}}_\nu^+(t)\mathbf{T}_\nu^*(\mathbf{r})e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{r})}e^{i\omega_\nu t}\right). \tag{6.340}$$

První člen na pravé straně přísluší přímé monochromatické elektromagnetické vlně, druhý člen zpětné vlně.
Označíme-li intenzitu elektrického pole přímé vlny $\hat{\mathbf{E}}_\nu^+(\mathbf{r},t)$, pak

$$\hat{\mathbf{E}}_\nu^+(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{E}}_\nu = i\mu\left(\frac{1}{2}\hbar\omega_\nu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\mathbf{a}}_\nu^-(t)e^{i(\mathbf{k},\mathbf{r})}e^{-i\omega_\nu t}\right). \tag{6.341}$$

Z předešlého plyne, že stavy operátoru $\hat{\mathbf{E}}_\nu^+(\mathbf{r},t)$ budou popsány stejnými vektory, jako stavy anihilačního operátoru $\hat{\mathbf{a}}_\nu^-$.
Platí-li operátorová rovnice

$$\hat{\mathbf{a}}_\nu^-\left|\mathbf{a}_\nu\right\rangle = \alpha_\nu\left|\mathbf{a}_\nu^-\right\rangle, \tag{6.342}$$

kde $\left|\mathbf{a}_\nu\right\rangle$ je stavový vektor operátoru $\hat{\mathbf{a}}_\nu^-$, α_ν vlastní hodnota operátoru $\hat{\mathbf{a}}_\nu^-$, pak platí operátorová rovnice

$$\hat{\mathbf{E}}_\nu^+\left|\mathbf{a}_\nu\right\rangle = \varepsilon_\nu\left|\mathbf{a}_\nu^-\right\rangle, \tag{6.343}$$

kde ε_ν je vlastní hodnota operátoru intenzity elektrického pole vidu ν přímé monochromatické rovinné vlny.
Pro něj srovnáním s (6.341) platí:

$$\varepsilon_\nu = i\mu\left(\frac{1}{2}\hbar\omega_\nu\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[i(\mathbf{k},\mathbf{r})\exp(-i\omega_\nu t)\right]. \tag{6.344}$$

Vyjádříme vlastní stavy anihilačního operátoru pomocí vlastních stavů operátoru počtu fotonů, které jsme označili $\left|\mathbf{n}\right\rangle$.

Vynásobíme operátorovou rovnici (6.332) zleva bravektorem $\langle \mathbf{n}_\nu |$, Tj. vlastním bravektorem operátoru počtu fotonů vidu ν, pak

$$\langle \mathbf{n}_\nu | \hat{\mathbf{a}}_\nu^- | \mathbf{a}_\nu \rangle = \alpha_\nu \langle \mathbf{n}_\nu | \mathbf{a}_\nu^- \rangle . \tag{6.345}$$

Z rekurentního vztahu (6.274) lze odvodit pro bravektor $\langle \mathbf{n}_\nu |$ rovnost

$$\langle \mathbf{n}_\nu | = (n!)^{-\frac{1}{2}} \langle \mathbf{0} | \left(\hat{\mathbf{a}}_\nu^+ \right)^n . \tag{6.346}$$

Pak

$$\langle \mathbf{n}_\nu | \mathbf{a}_\nu^- \rangle = (n!)^{-\frac{1}{2}} \langle \mathbf{0} | \left(\hat{\mathbf{a}}_\nu^+ \right)^n | \mathbf{a}_\nu^- \rangle = (n!)^{-\frac{1}{2}} \langle \mathbf{0} | \mathbf{a}_\nu^- \rangle \left(\alpha_\nu^* \right)^n . \tag{6.347}$$

Rozložme ketvektor stavu $| \mathbf{a}_\nu^- \rangle$ anihilačního operátoru do vlastních ketvektorů $| \mathbf{n}_\nu \rangle$ operátoru počtu částic:

$$| \mathbf{a}_\nu^- \rangle = \sum_n | \mathbf{n}_\nu \rangle \langle \mathbf{n}_\nu | \mathbf{a}_\nu \rangle = \sum_n | \mathbf{n}_\mathbf{v} \rangle \frac{\left(\alpha_\nu^* \right)^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} \langle \mathbf{0} | \mathbf{a}_\nu^- \rangle = \langle \mathbf{0} | \mathbf{a}_\nu^- \rangle \sum_n \frac{\left(\alpha_\nu^* \right)^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} | \mathbf{n}_\nu \rangle . \tag{6.348}$$

Odtud, uvážíme-li ortogonalita vektorů $| \mathbf{n}_\nu \rangle$, platí pro normu

$$\langle \mathbf{a}_\nu^- | \mathbf{a}_\nu^- \rangle = \langle \mathbf{0} | \mathbf{a}_\nu^- \rangle^2 \sum_n \frac{|\alpha_\nu|^{2n}}{(n!)} = \langle \mathbf{0} | \mathbf{a}_\nu^- \rangle^2 \exp |\alpha_\nu|^2 . \tag{6.349}$$

Proveďme normování tak, aby

$$\langle \mathbf{a}_\nu^- | \mathbf{a}_\nu^- \rangle = 1. \tag{6.350}$$

Pak

$$\langle \mathbf{0} | \mathbf{a}_\nu^- \rangle^2 \exp |\alpha_\nu|^2 = 1, \tag{6.351}$$

z čehož

$$\left\langle \mathbf{0} \middle| \mathbf{a}_\nu^- \right\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \left| \alpha_\nu \right|^2 \right). \qquad (6.352)$$

Po dosazení do (6.348):

$$\left| \mathbf{a}_\nu^- \right\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \left| \alpha_\nu \right|^2 \right) \sum_n \frac{\alpha^{n_\nu}}{\left(n_\nu ! \right)^{\frac{1}{2}}} \left| \mathbf{n}_\nu \right\rangle. \qquad (6.353)$$

Podobně

$$\left\langle \mathbf{a}_\nu^- \right| = \exp\left(-\frac{1}{2} \left| \alpha_\nu \right|^2 \right) \sum_n \frac{\left(\alpha^* \right)^{n_\nu}}{\left(n_\nu ! \right)^{\frac{1}{2}}} \left\langle \mathbf{n}_\nu \right|. \qquad (6.354)$$

Vztahy (6.353) a (6.354) jsou určeny ketvektor a bravektor stavu anihilačního operátoru, vyjádřené pomocí posloupnosti ketvektorů a bravektorů stavu operátoru počtu částic vidu ν.
Protože tyto vektory popisují stav intenzity elektrického pole přímé monochromatické vlny s přesně definovanou frekvencí ω_ν, popisují tyto vektory koherentní stavy.
Vyjdeme-li z operátorové rovnice (6.342), dostaneme po dosazení za kreační a anihilační operátory příslušné vztahy pomocí operátoru zobecněné souřadnice a impulsu, vycházejíce z předešlých vztahů, operátorovou rovnici

$$\left(2\hbar\omega_\nu \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\omega_\nu \hat{\mathbf{q}}_\nu + i\hat{\mathbf{p}}_\nu \right) \left| \mathbf{a}_\nu^- \right\rangle = \alpha_\nu \left| \mathbf{a}_\nu^- \right\rangle. \qquad (6.355)$$

Předpokládejme spojité spektrum vidů elektromagnetického pole (např. elektromagnetické pole v otevřeném prostoru).
Pak

$$\left(2\hbar\omega_\nu \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\omega\hat{\mathbf{q}} + i\hat{\mathbf{p}} \right) \left| \mathbf{a}^- \right\rangle = \alpha \left| \mathbf{a}^- \right\rangle, \qquad (6.356)$$

kde příslušné veličiny v předešlé operátorové rovnici jsou spojitými funkcemi frekvence.
Vynásobme rovnici (6.357) bravektorem $\langle \mathbf{q}' |$.
Pak

$$\left(2\hbar\omega_\nu\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\omega\langle \mathbf{q}'|\hat{\mathbf{q}}|\mathbf{a}^-\rangle + i\langle \mathbf{q}'|\hat{\mathbf{p}}|\mathbf{a}^-\rangle\right) = \alpha\langle \mathbf{q}'|\mathbf{a}^-\rangle. \qquad (6.357)$$

Uvědomme si přitom, že s uvážením definice zobecněného impulsu platí:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}'|\hat{\mathbf{p}} &= -i\hbar\frac{d}{dq'}\langle \mathbf{q}'|, \\ \langle \mathbf{q}'|\hat{\mathbf{q}} &= q'\langle \mathbf{q}'|, \\ \langle \mathbf{q}'|\hat{\mathbf{q}}|\mathbf{a}^-\rangle &= q'\langle \mathbf{q}'|\mathbf{a}^-\rangle. \end{aligned} \qquad (6.358)$$

Odtud

$$\frac{\omega}{\sqrt{2\hbar\omega}}q'\langle \mathbf{q}'|\mathbf{a}^-\rangle + \frac{\hbar}{\sqrt{2\hbar\omega}}\frac{d}{dq'}\langle \mathbf{q}'|\mathbf{a}^-\rangle = \alpha\langle \mathbf{q}'|\mathbf{a}^-\rangle. \qquad (6.359)$$

Po úpravě

$$\frac{d}{dq'}\langle \mathbf{q}'|\mathbf{a}^-\rangle = -2\left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}q' - \alpha\right]\langle \mathbf{q}'|\mathbf{a}^-\rangle. \qquad (6.360)$$

Vlnovou funkci jsme definovali skalárním součinem vlastního operátoru zobecněné souřadnice s vektorem operátoru příslušné dynamické veličiny, v našem případě anihilačního operátoru.
Označme tuto vlnovou funkci φ.
Z (6.360) pak dostaneme

$$\frac{d\varphi}{dq'} = -\frac{\omega}{\hbar}q' + 2\left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\varphi, \qquad (\ 6.361\ )$$

kde $\varphi = \langle \mathbf{q}' | \mathbf{a}^{-} \rangle$.

Diferenciální rovnice (6.361) je upravená operátorová rovnice pro výpočet vlnové funkce příslušející anihilačnímu operátoru, tedy vlnové funkce koherentního stavu.
Jejím řešením je

$$\varphi = C\exp\left[-\frac{\omega}{2\hbar}(q')^2 + 2\left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\alpha q'\right]. \qquad (\ 6.362\ )$$

integrační konstantu C určíme z podmínky normování vlnové funkce, tedy z podmínky

$$\int_0^\infty \varphi\varphi^*\, dq' = C^2\int_0^\infty \exp\left\{-2\left[\frac{\omega}{2\hbar}(q')^2 + 2\left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\alpha q'\right]\right\} dq' = 1. \qquad (\ 6.363\ )$$

Po integraci a po dosazení za C do (6.362) dostaneme

$$\varphi = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left\{-\left[\left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}q' - \alpha\right]^2\right\}. \qquad (\ 6.364\ )$$

Vztahem (6.364) je určena vlnová funkce koherentního stavu o frekvenci ω odvozená za předpokladu spojitého frekvenčního spektra. Vlastní hodnotu α může přitom nabývat libovolných hodnot.
Ze vztahu (6.364) vyplývá, že pravděpodobnost stavu, při němž je amplituda pole totožná se zobecněnou souřadnicí, je rovna q', přičemž

$$\varphi\varphi^* = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left\{-2\left[\left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} q' - \alpha\right]^2\right\} \tag{6.365}$$

má gaussovský průběh.
Již dříve jsme naznačili souvislost mezi rovinnou monochromatickou vlnou s vlnovým vektorem **k** a fotony s impulsem

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \tag{6.366}$$

a energií

$$E = cp = \hbar\omega.. \tag{6.367}$$

dvěma nezávislým polarizačním stavům elektromagnetické vlny musejí odpovídat dva nezávislé polarizační stavy fotonu (spin fotonu je sice roven jedné, ale díky nulovosti jeho klidové hmoty může být orientován jen ve nebo proti směru jeho impulsu).
Vektorový potenciál volného elektromagnetického pole zapíšeme jako superpozici monochromatických polarizovaných vln

$$\mathbf{A}(\mathbf{q},t) = \sum_{\lambda=1}^{2} \int d^3\mathbf{k}\ \mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda}(\mathbf{q},t), \tag{6.368}$$

kde

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda}(\mathbf{q},t) = \mathbf{e}(\mathbf{k},\lambda)\Big\{&A(\mathbf{k},\lambda)\exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}-\omega t)\right] + \\ &= A^*(\mathbf{k},\lambda)\exp\left[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}-\omega t)\right]\Big\},\end{aligned} \tag{6.369}$$

kde pro každý vektor **k** jsme dva vzájemně ortogonální vektory polarizace označili **e**(**k**,λ).
Platí tedy

$$\mathbf{e}(\mathbf{k},\lambda)\cdot\mathbf{e}(\mathbf{k},\lambda') = \delta_{\lambda\lambda'}\ , \tag{6.370}$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{k},\lambda)\cdot\mathbf{k}=0. \tag{6.371}$$

Pro další postup je formálně výhodné uvažovat pole uzavřené v kvádru o hranách a_i , jehož objem označíme V.
Později přejdeme k limitě $V \to \infty$.
Komponenty vlnových vektorů monochromatických vln ve zmíněném kvádru mohou nabývat pouze hodnot

$$k_i^{(n)} = \frac{2\pi}{a_i} n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.372}$$

a máme

$$\mathbf{A}(\mathbf{q},t) = \sum_{\lambda=1}^{2} \sum \mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda}(\mathbf{q},t), \tag{6.373}$$

kde suma probíhá přes všechny možné vlnové vektory vyhovující podmínce (6.372).
Snadno nalezneme, že celková energie elektromagnetického pole

$$E = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \left[\mathbf{E}^2(\mathbf{q},t) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{q},t) \right] d^3\mathbf{q} \tag{6.374}$$

popsaného vektorovým potenciálem (6.373) je rovna

$$E = 2\varepsilon_0 V c^2 \sum_{\lambda=1}^{2} \sum \mathbf{k}^2 A^*(\mathbf{k},\lambda) A(\mathbf{k},\lambda). \tag{6.375}$$

Pokud lze volné pole identifikovat se systémem vzájemně neinteragujících fotonů, můžeme hamiltonián zapsat ve tvaru

$$\hat{\mathbf{H}} = c \sum_{\lambda=1}^{2} \sum_{\mathbf{p}} p \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{p},\lambda). \tag{6.376}$$

Lze rovněž zavést kreační a anihilační operátory fotonu s impulsem **p** a polarizací λ tak, že

$$\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{p},\lambda)=\hat{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{p},\lambda)\hat{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{p},\lambda). \qquad (\ 6.377\ )$$

Přitom platí komutační relace

$$\begin{aligned}&\left[\hat{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{p},\lambda),\hat{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{p}',\lambda')\right]=\left[\hat{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{p},\lambda),\hat{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{p}',\lambda')\right]=0\,,\\&\left[\hat{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{p},\lambda),\hat{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{p}',\lambda')\right]=\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\delta_{\lambda\lambda'}\,.\end{aligned} \qquad (\ 6.378\ )$$

Porovnáme-li nyní hamiltonián (6.376) zapsaný pomocí kreačních a anihilačních operátorů:

$$\hat{\mathbf{H}}=c\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\mathbf{p}}p\hat{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{p},\lambda)\hat{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{p},\lambda) \qquad (\ 6.379\ )$$

s klasickým výrazem (6.375), vidíme, že $E\rightarrow\hat{\mathbf{H}}$, když

$$(2\varepsilon_0 V)^{\frac{1}{2}}ck\mathbf{A}(\mathbf{k},\lambda)\rightarrow(cp)^{\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{p},\lambda), \qquad (\ 6.380\ )$$

což s využitím vztahu (6.366) můžeme vyjádřit jako

$$\mathbf{A}(\mathbf{k},\lambda)\rightarrow\frac{\hbar}{(2\varepsilon_0 Vp)^{\frac{1}{2}}}\hat{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{p},\lambda). \qquad (\ 6.381\ )$$

Tuto substituci můžeme považovat za formuli vyjadřující princip korespondence mezi klasickou a kvantovou teorií elektromagnetického pole.
Provedeme-li ji ve formulích (6.369), (6.373), obdržíme operátor

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q},t) = \frac{\hbar}{(2\varepsilon_0 c V)^{\frac{1}{2}}} \sum_{\lambda=1}^{2} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{e}(\mathbf{p},\lambda)}{p^{\frac{1}{2}}} \left\{ \hat{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{p},\lambda) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} - Et) \right] + \right.$$
$$\left. + \hat{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{p},\lambda) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} - Et) \right] \right\}.$$

(6.382)

Snadno se přesvědčíme, že

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q},t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q},t), \hat{\mathbf{H}} \right] \qquad (6.383)$$

a

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q},t) = 0, \qquad (6.384)$$

což nás utvrzuje v přesvědčení o oprávněnosti považovat $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q},t)$ za operátor popisující v Heisenbergově reprezentaci elektromagnetické pole.
Odpovídající operátor v reprezentaci Schrödingerově je dán formulí (6.382) pro nějaké pevně zvolené $t = t_0$.
Na volbě okamžiku t_0 pochopitelně žádná fyzikální předpověď nezávisí.
Pro zjednodušení formulí vezmeme v dalším $t_0 = 0$.
Tedy ve Schrödingerově reprezentaci je vektorovému potenciálu přiřazen operátor

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q},t) = \frac{\hbar}{(2\varepsilon_0 c V)^{\frac{1}{2}}} \sum_{\lambda=1}^{2} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{e}(\mathbf{p},\lambda)}{p^{\frac{1}{2}}} \left\{ \hat{\mathbf{A}}^{-}(\mathbf{p},\lambda) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}) \right] + \right.$$
$$\left. + \hat{\mathbf{A}}^{+}(\mathbf{p},\lambda) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}) \right] \right\}.$$

(6.385)

Připomeňme, že v této formuli je

$$\sum_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{p}} f(p_1, p_2, p_3) = \sum_{i,j,k=-\infty}^{\infty} f\left(p_1^{(i)}, p_2^{(j)}, p_3^{(k)}\right), \qquad (6.386)$$

kde (viz (6.372))

$$p_i^{(n)} = \frac{2\pi\hbar}{a_i} n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \qquad (6.387)$$

Označíme-li interval mezi sousedními možnými hodnotami *i*-té komponenty impulsu jako

$$\Delta p_i = \frac{2\pi\hbar}{a_i}, \qquad (6.388)$$

můžeme formuli (6.386) zapsat jako

$$\sum_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}) = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{i,j,k=-\infty}^{\infty} f\left(p_1^{(i)}, p_2^{(j)}, p_3^{(k)}\right) \Delta p_1 \Delta p_2 \Delta p_3 \ . \qquad (6.389)$$

Odtud vidíme, že v limitě $V \to \infty$ platí

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}) \to \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int f(\mathbf{p})\, d^3\mathbf{p}, \qquad (6.390)$$

kde suma probíhá přes celý třírozměrný impulsový prostor. Označíme-li

$$\Delta p \equiv \frac{(2\pi\hbar)^3}{V}, \qquad (6.391)$$

potom v limitě $V \to \infty$ přejde operátor (6.304) v

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{(\pi\varepsilon_0 c\hbar)^{\frac{1}{2}}}\sum_{\lambda=1}^{2}\int\frac{d^3\mathbf{p}}{p^{\frac{1}{2}}}\mathbf{e}(\mathbf{p},\lambda)\left[\hat{\mathbf{a}}^-(\mathbf{p},\lambda)\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})\right]+\right.$$
$$\left.\left.+\hat{\mathbf{a}}^+(\mathbf{p},\lambda)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})\right]\right]\right\},$$

(6.392)

kde

$$\hat{\mathbf{a}}^-(\mathbf{p},\lambda) \equiv \lim_{V\to\infty}\frac{\hat{\mathbf{A}}^-(\mathbf{p},\lambda)}{(\Delta p)^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.393)$$

Snadno se přesvědčíme, že platí

$$\left[\hat{\mathbf{a}}^-(\mathbf{p},\lambda),\hat{\mathbf{a}}^-(\mathbf{p}',\lambda')\right] = \left[\hat{\mathbf{a}}^+(\mathbf{p},\lambda),\hat{\mathbf{a}}^+(\mathbf{p}',\lambda')\right] = 0\,,$$
$$\left[\hat{\mathbf{a}}^-(\mathbf{p},\lambda),\hat{\mathbf{a}}^+(\mathbf{p}',\lambda')\right] = \delta_{\lambda\lambda'}\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,. \quad (6.394)$$

Princip korespondence nám říká, že operátor popisující ve Schrödingerově reprezentaci interakci kvantově mechanické soustavy s elektromagnetickým polem obdržíme z operátoru popisujícího interakci této soustavy s vnějším polem prostou záměnou

$$\mathbf{A}\left(\hat{\mathbf{Q}}^{(j)},t\right) \to \hat{\mathbf{A}}\left(\hat{\mathbf{Q}}^{(j)}\right). \quad (6.395)$$

Hledaným interakčním hamiltoniánem je pak časově nezávislý operátor

$$\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{I}} = -\sum_{j=1}^{Z}\frac{e^{(j)}}{M^{(j)}}\left[\hat{\mathbf{A}}\left(\hat{\mathbf{Q}}^{(j)}\right)\hat{\mathbf{P}}^{(j)}\right] \quad (6.396)$$

a celkový hamiltonián uvažovaného systému je roven

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{0}} + \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{I}}, \quad (6.397)$$

kde

$$\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{0}} = \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{F}} \,. \tag{6.398}$$

Přitom $\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{P}}$ je hamiltonián uvažované kvantové soustavy při vypnuté interakci s elektromagnetickým polem a $\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{F}}$ je hamiltonián volného elektromagnetického pole (6.379), který v limitě $V \to \infty$ můžeme zapsat jako

$$\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{F}} = \sum_{\lambda=1}^{2} \int c \cdot q \cdot \hat{\mathbf{a}}^{+}(\mathbf{p},\lambda)\,\hat{\mathbf{a}}^{-}(\mathbf{p},\lambda)\, d^{3}\mathbf{p} \,. \tag{6.399}$$

Hilbertův prostor uvažovaného systému lze vyjádřit jako

$$H = H_{\mathrm{P}} \otimes H_{\mathrm{F}} \;, \tag{6.400}$$

kde H_{P} je Hilbertovým prostorem kvantově mechanické soustavy a Hilbertův prostor elektromagnetického pole jsme označili symbolem H_{F}.
O všech operátorech vystupujících v poruše (6.396) víme, jak v prostoru (6.400) působí.
Můžeme tedy bez potíží provádět poruchové výpočty.
Pro větší názornost budeme zpočátku pracovat s operátory pole ve tvaru (6.385) a teprve ve výsledných formulích přejdeme k limitě $V \to \infty$.
V prostoru H_{F} přitom užijeme reprezentaci obsazovacích čísel, v níž

$$\left| n_1, n_2, \ldots, n_j, \ldots ; n \right\rangle \tag{6.401}$$

je vlastním vektorem operátoru $\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{F}}$ popisujícím n fotonů, z nichž n_1 má impuls $\mathbf{q}_1$ a polarizaci λ_1, n_2 fotonů impuls $\mathbf{q}_2$ a polarizaci λ_2 atd.
Připomeňme, že platí

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}^{+}\left(\mathbf{p}_j,\lambda_j\right)\left| n_1,\ldots,n_j,\ldots ; n \right\rangle &= \left(n_j+1\right)^{\frac{1}{2}} \left| n_1,\ldots,n_j+1,\ldots ; n+1 \right\rangle , \\ \hat{\mathbf{A}}^{-}\left(\mathbf{p}_j,\lambda_j\right)\left| n_1,\ldots,n_j,\ldots ; n \right\rangle &= n_j^{\frac{1}{2}} \left| n_1,\ldots,n_j-1,\ldots ; n-1 \right\rangle . \end{aligned} \tag{6.402}$$

Odtud ihned vidíme, že nenulové maticové elementy operátoru (6.385) mají tvar

$$
\begin{aligned}
&\left\langle n_1,\ldots,n_j+1,\ldots;n+1\right|\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q})\left|n_1,\ldots,n_j,\ldots;n+1\right\rangle=\\
&=\left(n_j+1\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\hbar}{\left(2\varepsilon_0 cV\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathbf{e}\left(\mathbf{p}_j,\lambda_j\right)}{p_j^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}_j\mathbf{q}\right),\\
&\left\langle n_1,\ldots,n_j-1,\ldots;n-1\right|\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q})\left|n_1,\ldots,n_j,\ldots;n\right\rangle=\\
&=\left(n_j\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\hbar}{\left(2\varepsilon_0 cV\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathbf{e}\left(\mathbf{p}_j,\lambda_j\right)}{p_j^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}_j\mathbf{q}\right).
\end{aligned}
\qquad (\ 6.403\ )
$$

Počáteční stav systému připravíme tak, že v něm je kvantově mechanická soustava ve vlastním stavu hamiltoniánu $\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{P}}$ popsaném normalizovaným vektorem $\left|u_i\right\rangle$ a n fotonů, z nichž n_1 má impuls $\mathbf{q}_1$ a polarizaci λ_1, n_2 fotonů impuls $\mathbf{q}_2$ a polarizaci λ_2 atd.
Tento počáteční stav je popsán normalizovaným vektorem

$$
\left|u_i\right\rangle\left|n_1,\ldots n_j,\ldots;n\right\rangle\ , \qquad (\ 6.404\ )
$$

který je vlastním vektorem operátoru (6.399).
Vlivem interakce (6.396) může uvažovaný systém přejít (odhlédnemeli od korekcí implikovaných vyššími řády poruchové teorie) pouze do stavů, v nichž je o jeden foton více či méně, zatímco všechny ostatní fotony si podrží původní hodnotu svého impulsu i polarizace.
Přitom pravděpodobnost připadající na jednotku času, že dojde k přechodu do stavu popsaného normalizovaným vlastním vektorem operátoru (6.399)

$$
\left|u_f\right\rangle\left|n_1,\ldots n_j\pm1,\ldots;n\pm1\right\rangle \qquad (\ 6.405\ )
$$

je dána formulí

$$
w_{\left(i,n_j\right)\to\left(f,n_j\pm1\right)}=\frac{2\pi}{\hbar}\left|M_{\left(f,n_j\pm1\right),\left(i,n_j\right)}\right|^2\delta\left(E_i-E_f\mp cp_i\right), \qquad (\ 6.406\ )
$$

kde E_i , resp. E_f je energie počátečního, resp. koncového stavu kvantově mechanické soustavy, tj.

$$\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{P}}\left|u_i\right\rangle = E_i\left|u_i\right\rangle, \qquad (6.407)$$
$$\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{P}}\left|u_f\right\rangle = E_f\left|u_f\right\rangle,$$

(v tomto smyslu popisují vektory $\left|u_i\right\rangle, \left|u_f\right\rangle$ stacionární stavy kvantově mechanické soustavy) a

$$M_{(f,n'_j),(i,n_j)} = \left\langle n_1,\ldots,n'_j,\ldots;n'\right|\left\langle u_f\right|\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{I}}\left|u_i\right\rangle\left|n_1,\ldots,n_j,\ldots;n\right\rangle. \qquad (6.408)$$

Pro poruchu (6.396) odtud s využitím formule (6.403) dostáváme

$$M_{(f,n_j+1),(i,n_j)} = \left(\frac{n_j+1}{V}\right)^{\frac{1}{2}} M_{fi}\left(\mathbf{p}_j,\lambda_j\right), \qquad (6.409)$$

kde

$$M_{fi}\left(\mathbf{p}_j,\lambda_j\right) \equiv -\frac{\hbar}{\left(2\varepsilon_0 c\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathbf{e}\left(\mathbf{p}_j,\lambda_j\right)}{p_j^{\frac{1}{2}}}\sum_{n=1}^{Z}\frac{e^{(n)}}{M^{(n)}}\left\langle u_f\right|\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}_j\cdot\hat{\mathbf{Q}}^{(n)}\right)\hat{\mathbf{P}}^{(n)}\left|u_i\right\rangle. \qquad (6.410)$$

Vzhledem k přítomnosti δ-funkce ve formuli (6.406) je

$$p_j = \frac{E_j - E_f}{c}. \qquad (6.411)$$

Jestliže jsou rozměry studované kvantové soustavy mnohem menší než $\hbar p_j^{-1}$, tj. jestliže

$$E_i - E_f \ll \frac{\hbar c}{a}, \qquad (6.412)$$

můžeme použít dipólového přiblížení a formule (6.410) se zjednoduší na

$$M_{fi}\left(\mathbf{p}_j,\lambda_j\right)=i\left(\frac{E_i-E_f}{2\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{e}\left(\mathbf{p}_j,\lambda_j\right)\langle u_f|\hat{\mathbf{d}}|u_i\rangle, \qquad (\ 6.413\ )$$

kde

$$\hat{\mathbf{d}}\equiv\sum_{j=1}^{Z}e^{(j)}\hat{\mathbf{Q}}^{(j)} \qquad (\ 6.414\ )$$

je operátor dipólového momentu uvažované kvantové soustavy.
Zcela analogicky nalezneme, že

$$M_{(f,n_j-1),(i,n_j)}=\left(\frac{n_j}{V}\right)^{\frac{1}{2}}M^*_{fi}\left(\mathbf{p}_j,\lambda_j\right). \qquad (\ 6.415\ )$$

Povšimněme si, že pravděpodobnost absorpce či emise fotonu s daným impulsem a polarizací je nezávislá na přítomnosti fotonů s jinou polarizací nebo impulsem.
Pravděpodobnost absorpce je úměrná počtu fotonů se stejnou polarizací a impulsem v počátečním stavu. Pravděpodobnost vyzáření fotonu je složena ze dvou členů.
První z nich je úměrný počtu fotonů se stejnými kvantovými čísly přítomných v počátečním stavu – popisuje **stimulovanou emisi**, zatímco druhý je zcela nezávislý na fotonech počátečního stavu (je nenulovým, i když v počátečním stavu není žádný foton!) – popisuje **spontánní emisi**.
Víme, že

$$n_j\equiv n\left(\mathbf{p}_j,\lambda_j\right) \qquad (\ 6.416\ )$$

udává počet fotonů, které v uvažovaném objemu V mají impuls $\mathbf{p}_j$ a polarizaci λ_j .

Protože spektrum možných hodnot impulsu je v tomto případě diskrétní, udává veličina (6.416) také počet fotonů s polarizací λ_j, které mají impuls ležící uvnitř kvádru o hranách velikosti (6.388) a středem v bodě $\mathbf{p}_j$.
Pro velké objemy V počet fotonů s danou polarizací λ a impulsem z okolí $d^3\mathbf{p}$ bodu $\mathbf{p}$ vyjádřit jako

$$\frac{n(\mathbf{p},\lambda)}{\Delta p} d^3\mathbf{p} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} n(\mathbf{p},\lambda)\, p^2 dp\, d\Omega . \qquad (6.417)$$

Tedy hustota fotonů s polarizací λ s impulsem jehož velikost spadá do intervalu (p, $p + dp$) s jehož směr leží v prostorovém úhlu $d\Omega$ kolem jednotkového vektoru $\mathbf{n}$ je rovna

$$\frac{n(\mathbf{p},\lambda)}{(2\pi\hbar)^3} p^2 dp\, d\Omega , \qquad (6.418)$$

kde

$$\mathbf{p} \equiv p\mathbf{n} . \qquad (6.419)$$

Tomu odpovídá hustota toku energie v elementu prostorového úhlu $d\Omega$ ve směru $\mathbf{n}$ připadající na fotony s energií z okolí $d\hbar\omega$ bodu $\hbar\omega$:

$$I(\omega,\mathbf{k})\, d\omega\, d\Omega = cpc \frac{n(\mathbf{p},\lambda)}{(2\pi\hbar)^3} p^2 dp\, d\Omega , \qquad (6.420)$$

kde jsme využili formule (6.367) a faktu, že foton, jakožto částice s nulovou klidovou hmotou, se pohybuje rychlostí světla.
Uvážíme-li, že

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} , \qquad (6.421)$$

dostaneme hledaný výraz pro spektrální hustotu záření

$$I(\omega,\mathbf{k})\frac{c}{(2\pi)^3}\frac{n(\mathbf{p},\lambda)}{\hbar^2}p^3. \qquad (6.422)$$

pravděpodobnost, že kvantově mechanický systém ve stacionárním stavu u_i za jednotku času přejde do stacionárního stavu u_f tím, že absorbuje jeden foton s polarizací λ_j a impulsem z oblasti $\Delta\mathbf{p}$ je dána výrazem

$$w_{if}^{(ab)}(\lambda_j,\Delta\mathbf{p})=\sum_{\Delta\mathbf{q}}w_{(i,n_j)\to(f,n_j-1)}, \qquad (6.423)$$

kde suma probíhá přes všechny možné přípustné hodnoty $\mathbf{p}_i$ (viz (1002)), ležící v oblasti $\Delta\mathbf{p}$.

$$w_{if}^{(ab)}(\lambda_j,\Delta\mathbf{p})=\frac{2\pi}{\hbar}\frac{1}{V}\sum_{\Delta\mathbf{p}}N_j\left|M_{if}(\mathbf{p}_j,\lambda_j)\right|^2\delta\left(E_i-E_f+cp_j\right), \qquad (6.424)$$

což po přechodu k limitě $V\to\infty$ můžeme vyjádřit jako (srov. (6.390))

$$w_{if}^{(ab)}(\lambda_j,\Delta\mathbf{p})=\frac{2\pi}{\hbar}\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int_{\Delta\mathbf{p}}N(\mathbf{p},\lambda)\left|M_{if}(\mathbf{p},\lambda)\right|^2\delta\left(E_i-E_f+cp\right)d^3\mathbf{p}=$$
$$=\frac{p^2}{(2\pi)^2\hbar^4c}\int_{\Omega(\Delta\mathbf{p})}N(\mathbf{p},\lambda)\left|M_{if}(\mathbf{p},\lambda)\right|^2d\Omega_{\mathbf{p}}\,. \qquad (6.425)$$

Poslední rovnost platí za předpokladu, že v oblasti $\Delta\mathbf{p}$ leží vektor velikosti

$$p\equiv\frac{E_f-E_i}{c}, \qquad (6.426)$$

jinak je odpovídající pravděpodobnost nulová.

Příspěvek fotonů **absorbovaných** z prostorového úhlu $d\Omega$ k pravděpodobnosti (6.425) je

$$\frac{dw_{i\to f}^{(ab)}(\lambda,\mathbf{p})}{d\Omega}=\frac{p^2}{(2\pi)^2\hbar^4 c}N(\mathbf{p},\lambda)\left|M_{if}(\mathbf{p},\lambda)\right|^2, \qquad (6.427)$$

což na základě (6.422) můžeme upravit do tvaru

$$\frac{dw_{i\to f}^{(ab)}(\lambda,\mathbf{p})}{d\Omega}=\frac{2\pi}{\hbar^3 c}\frac{I(\omega_{fi},k)}{\omega_{fi}}\left|M_{if}(\mathbf{p},\lambda)\right|^2. \qquad (6.428)$$

Dosadíme-li do pravé strany formule (6.410), resp. (6.413), dostaneme pro pravděpodobnost excitace kvantově mechanické soustavy vnějším elektromagnetickým zářením

$$\frac{dw_{m\to n}^{(ex)}(\lambda,\mathbf{p})}{d\Omega}=\frac{\pi}{\varepsilon_0\hbar^2 c}\frac{I(\omega_{nm},\mathbf{k})}{\omega_{nm}^2}\left|U_{mn}(\mathbf{k})\right|^2, \qquad (6.429)$$

kde

$$U_{mn}(\mathbf{k})\equiv\mathbf{e}\cdot\sum_{j=1}^{Z}\frac{e^{(j)}}{M^{(j)}}\left\langle u_m\right|\exp\left(i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{Q}}^{(j)}\right)\hat{\mathbf{P}}^{(j)}\left|u_n\right\rangle, \qquad (6.430)$$

resp.

$$\boxed{\frac{dw_{nm}^{ex}}{d\Omega}=\frac{\pi}{\varepsilon_0\hbar^2 c}I(\omega_{nm},\mathbf{k})\left|\left\langle u_m\right|\mathbf{e}\cdot\hat{\mathbf{d}}\left|u_n\right\rangle\right|^2} \qquad (6.431)$$

v dipólovém přiblížení.
Jestliže maticový element dipólového momentu je nulovým, dává formule (6.431) předpověď nulové pravděpodobnosti přechodů

$$
\begin{aligned}
&|u_n\rangle \rightarrow |u_m\rangle\,,\\
&|u_m\rangle \rightarrow |u_n\rangle\,,
\end{aligned}
\qquad (\ 6.432\ )
$$

a říkáme, že tyto **přechody jsou zakázané**.
To však ještě neznamená, že by elektromagnetické záření nemohlo vést k přechodům (6.432).
Nulovost maticového elementu dipólového momentu ještě neimplikuje nulovost veličiny (6.430).
Započtením dalších členů Taylorova rozvoje exponenciely dostáváme na pravé straně (6.430) výrazy úměrné maticovým členům vyšších elektrických a magnetických multipólů a tyto mohou být nenulové.
Říkáme-li tedy o nějakém přechodu, že je zakázaným, znamená to jen tolik, že není možný elektrický dipólový přechod.
Nevylučujeme tím ale elektrické přechody vyšších multipolarit (kvadrupólové atd.) a magnetické multipólové přechody (dipólové apod.).
Může se však stát, že i celá veličina (6.430) je nulovou.
Potom říkáme, že přechody (6.432) jsou **silně zakázané**.
Opět to však neznamená, že by kvantová teorie předpovídala nemožnost vyvolání přechodů (6.432) elektromagnetickým zářením.
Připomeňme, že formule (6.429) je odvozena v prvním řádu poruchové teorie.
Příspěvky vyšších řádů pak mohou vést k nenulové pravděpodobnosti uvažovaných přechodů.

Pro stimulovanou emisi dostáváme

$$
\begin{aligned}
\frac{dw^{(stim)}_{i\rightarrow f}(\lambda,\mathbf{p})}{d\Omega} &= \frac{p^2}{(2\pi)^2\,\hbar^4 c} N(\mathbf{p},\lambda)\left|M_{fi}(\mathbf{p},\lambda)\right|^2 = \\
&= \frac{2\pi}{\hbar^3 c}\frac{I(\omega_{if},k)}{\omega_{if}}\left|M_{fi}(\mathbf{p},\lambda)\right|^2\,,
\end{aligned}
\qquad (\ 6.433\ )
$$

a pro spontánní emisi

$$\frac{dw_{i\to f}^{(spon)}(\lambda,\mathbf{p})}{d\Omega} = \frac{p^2}{(2\pi)^2\hbar^4 c}\left|M_{fi}(\mathbf{p},\lambda)\right|^2, \qquad (6.434)$$

či v dipólovém přiblížení

$$\frac{dw_{i\to f}^{(spon)}(\lambda,\mathbf{p})}{d\Omega} = \frac{\omega_{if}^3}{8\pi^2\hbar c^3\varepsilon_0}\left|\mathbf{e}(\mathbf{p},\lambda)\cdot\langle u_f|\hat{\mathbf{d}}|u_i\rangle\right|^2. \qquad (6.435)$$

Všimněme si, že silně zakázané přechody nemohou být realizovány absorpcí či emisí jediného fotonu, vícefotonové přechody však pro ně vyloučeny nejsou.